Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til øving 9

Veiledning uke 9 og 10.

Oppgave	A	B	C	D
1			x	
2		x		
3				x
4			x	
5				x
6	x			
7				x
8				x
9			x	
10	x			
11				x
12	x			
13			x	
14			x	
15				x
16			x	
17	x			
18				x
19	x			
20				x

1) Ladningen Q er fordelt over lederens overflate og resulterer i en eller annen slags flateladningstetthet σ. (Som typisk vil variere fra sted til sted på lederens overflate, med mindre den er kuleformet. Stor ladningstetthet der overflaten har liten krumningsradius, f.eks. skarpe kanter, liten ladningstetthet der overflaten har stor krumningsradius.) Den dobbelt så store ladningen $2Q$ vil fordele seg på tilsvarende vis og resultere i en flateladningstetthet 2σ. Det elektriske feltet i punktet P kan da beregnes fra Coulombs lov. Med ladning Q:

$$\boldsymbol{E}_1(P) = \int_S \frac{\sigma \, dA}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Med ladning $2Q$:

$$\boldsymbol{E}_2(P) = \int_S \frac{2\sigma \, dA}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = 2\boldsymbol{E}_1(P)$$

Her går integralene over lederens (lukkede) overflate S, r er avstanden fra flateelementet dA til P og $\hat{r}$ er enhetsvektor langs retningen fra dA til P.
Ettersom feltet overalt (dvs: overalt på *utsiden* av lederen!) er blitt dobbelt så stort, må også potensialet (f.eks. relativt til uendelig langt unna)

$$V(P) = -\int_{\infty}^{P} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

ha blitt dobbelt så stort.

2) Ettersom $E = 0$ overalt inne i metallkula, må nettoladningen Q (pga Gauss' lov) fordele seg på kulas overflate, og av symmetrigrunner jevnt utover overflaten. Da gir Gauss' lov, med kuleformet gaussflate med radius r større enn kulas radius,

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dvs som for punktladning Q i sentrum av metallkula. Potensialet $V(r)$ må følgelig også bli som for punktladning,

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(Inne i metallkula og på kulas overflate er potensialet konstant lik $Q/4\pi\varepsilon_0 R$, der R er kulas radius.)
Med dobbelt så stor avstand fra kulas sentrum til B som til A blir feltet redusert med en faktor 4, mens potensialet blir redusert med en faktor 2.
[På min utskrift av oppgaveteksten ser det ut som det står en O ved siden av metallkula. Det skal egentlig være en Q.]

3) Potensialet på ei metallkule med radius R og ladning Q er (se forrige oppgave)

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

La oss f.eks. sette $V_0 = V(a) = Q/4\pi\varepsilon_0 a$, slik at $V_1 = V_0/2 = 15V_0/30$, $V_2 = V_0/3 = 10V_0/30$ og $V_3 = V_0/5 = 6V_0/30$. Da ser vi at $V_1 : V_2 : V_3 = 15 : 10 : 6$.
Det er intuitivt rimelig at potensialet er størst for kula med minst radius: Tenk deg at du starter med ei nøytral metallkule og putter på elektrisk ladning inntil nettoladningen er Q. Da møter du "større motstand" jo mindre kula er, dvs du må utføre et større arbeid for å putte ladningen på ei lita kula i forhold til ei stor kule. Med andre ord, den minste kula ender opp med størst potensiell energi, og dermed også størst elektrisk potensial.
[Hadde ladningen vært negativ, ville den minste kula hatt *minst* elektrisk potensial, dvs *mest negativt* potensial i forhold til $V(\infty) = 0$. Fremdeles ville den minste kula hatt størst potensiell energi, ettersom $\Delta U = Q\Delta V = -|Q|\Delta V$ når $Q < 0$.]

4) La oss bestemme retningen på det elektriske feltet like i nærheten av de to ladningene, med utgangspunkt i at det elektriske feltet peker inn mot en negativ ladning. Like til venstre for $x = -a$ må feltet peke mot høyre, dvs $E(x) > 0$. Alle kurver stemmer med dette. Men like til høyre for $x = -a$ må feltet peke mot venstre, dvs $E(x) < 0$. Kurve 1 stemmer ikke med dette.

Like til venstre for $x = a$ må feltet peke mot høyre, dvs $E(x) > 0$. Kurve 4 stemmer ikke med dette. Og endelig, like til høyre for $x = a$ må feltet peke mot venstre, dvs $E(x) < 0$. Kurve 2 stemmer ikke med dette. Vi står igjen med kurve 3, som stemmer. Vi ser at $E(0) = 0$ i kurve 3, som opplagt også må være riktig.

5) $E = 0$ inne i metallkula, dermed er A og C ikke aktuelle. (Feltlinjene i B tilsvarer, som vi skal se om noen uker, magnetfeltet rundt en strømførende leder som står normalt på papirplanet.)

6) La oss først bli enige om hva som skjer her: Ladningen q fordeler seg jevnt på metallkulas overflate og skaper et elektrisk felt $E_0(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ utenfor (dvs $r > R$; $E = 0$ inne i metallkula). Elektriske dipoler i plasten rettes inn på grunn av E_0, og netto effekt av denne polariseringen er at det induseres en negativ ladning $-q_i$ på indre overflate av plastlaget og en positiv ladning q_i på ytre overflate av plastlaget. Den induserte ladningen $-q_i$ skaper et elektrisk felt $E_i(r) = -q_i/4\pi\varepsilon_0 r^2$ i plastlaget, motsatt rettet E_0, dvs med retning radielt innover, slik at det totale elektriske feltet $E = E_0 + E_i$ blir svekket i plastlaget i forhold til om vi hadde hatt luft. På utsiden av plasten "gjenopprettes" feltstyrken av den induserte ladningen q_i på ytre overflate. Alternativt, med Gauss' lov: Total ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r > 2R$ er $q - q_i + q_i = q$, så elektrisk felt her blir $E_0(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Total ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $R < r < 2R$ er $q - q_i$, så her, dvs i plasten, blir elektrisk felt $E(r) = (q - q_i)/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
Polarisering $\boldsymbol{P}$ er, pr definisjon, elektrisk dipolmoment pr volumenhet. Det er bare inne i det dielektriske plastlaget at vi har elektriske dipoler, og dermed bare her vi har en P forskjellig fra null. Feltlinjer for E ville bli som i figuren, men i tillegg ville nye feltlinjer starte på plastlagets ytre overflate.
Vi står igjen med elektrisk forskyvning D, og vi husker at D er bestemt av fri ladning: Gauss' lov for D lyder

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q_{\mathrm{fri}}$$

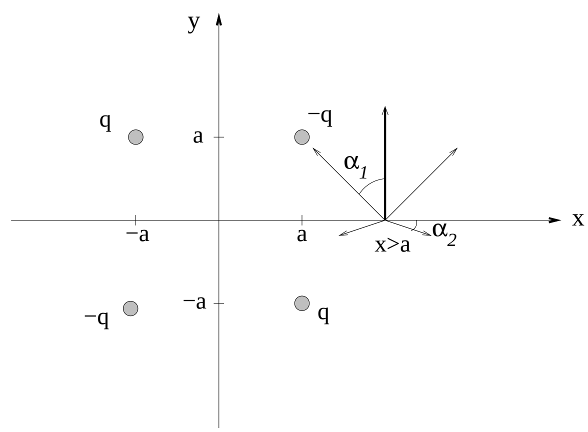
Og med *fri* ladning mener vi rett og slett all ladning bortsett fra indusert (bundet) ladning knyttet til polariseringen i eventuelle dielektrika som er til stede. Her er det ladningen q på metallkula som representerer fri ladning, mens $\pm q_i$ representerer indusert, bundet ladning.
Bruk av Gauss' lov for D gir umiddelbart $D(r) = q/4\pi r^2$ overalt på utsiden av metallkula, så de inntegnede feltlinjene stemmer bra med dette.

7) Vi kan her anta at vi har tilnærmet uendelig store plan. Da vet vi at det elektriske feltet fra et plan er lik planets ladning pr flateenhet dividert med $2\varepsilon_0$, altså uavhengig av avstanden fra planet. Dermed kan vi utelukke C, ettersom feltet på utsiden må være lik null (like stort, men motsatt rettet feltbidrag fra de to platene når vi befinner oss på utsiden). Videre må A opplagt være feil: Vi kan i hvert fall ikke få et sterkere felt i dielektrikumet enn i vakuum.
Men hvorfor er ikke B riktig? Var det ikke slik at feltet skulle bli svekket hvis vi puttet inn et dielektrikum? Jo, men: Tenk deg at vi starter med vakuum over det hele. Da er ladningene $\pm Q$ jevnt fordelt på de to platene. Så setter vi inn dielektrikumet i venstre halvdel. På grunn av feltet fra metallplatene får vi da en innretting av elektriske dipoler og dermed en indusert overflateladning på dielektrikumet, positiv øverst og negativ nederst. Hvis ikke noe mer skjedde, ville vi ikke ha elektrostatisk likevekt: Det er ikke lenger energetisk fordelaktig å ha den frie ladningen jevnt fordelt over metallplatene! Den induserte positive ladningen

øverst vil trekke frie elektroner fra høyre halvdel av øverste metallplate over til venstre, nederst vil det motsatte skje. Og når har vi elektrostatisk likevekt? Jo, når potensialet overalt på øverste plate har samme verdi V_- og potensialet overalt på nederste plate har samme verdi V_+. (Husk: En metallplate er et ekvipotensial i likevekt!) I likevekt har vi samme *totale* ladningstetthet på venstre og høyre side. På høyre side har vi $\sigma = \sigma_f^0$ og på venstre side har vi $\sigma = \sigma_f^1 - \sigma_i$. Her angir indeks f fri ladning på metallplatene og i angir indusert ladning. Med plateareal A må disse tetthetene av ladning selvsagt oppfylle $\pm Q = \pm(\sigma_f^0 A/2 + \sigma_f^1 A/2) =$ total fri ladning på metallplatene. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet fremdeles stå normalt på platene, og ettersom potensialet er konstant over hver enkelt plate må også feltet være uniformt, $E = \Delta V/d = (V_+ - V_-)/d$, der d er avstanden mellom platene.

8) Null felt inne i metallet eliminerer A og C. Polarisering i plasten reduserer feltet her med en faktor $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 10$ i forhold til om vi hadde hatt luft eller vakuum. Feltet faller av som $1/r^2$, men dette gir bare en reduksjonsfaktor på $(5/4)^2/(5/2)^2 = 1/4$ når vi sammenligner posisjonene B og D. Altså blir feltet størst i posisjon D.

9) I punktet $(x, 0)$ $(x > a)$ bidrar ladningene med parvis like store felt (i absoluttverdi), og med retninger som vist i figuren:



Vektorsummen av de fire tynne vektorene gir tilsammen et elektrisk felt som peker i positiv y-retning.

10) Potensialet fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

der r er avstanden fra punktladningen. Det totale potensialet er summen av potensialet fra hver enkelt punktladning (superposisjonsprinsippet). Her har vi to og to ladninger med motsatt fortegn men med samme avstand. Altså må summen bli null. Vi ser faktisk at hele xz-planet er en ekvipotensialflate med verdien $V = 0$. Det samme må da også gjelde for yz-planet.

11) I forelesningene brukte vi en parallellplatekondensator som eksempel og startet med

$$U = \int_0^Q v(q)\, dq$$

og viste at med et elektrisk felt $\boldsymbol{E}$ har vi en (potensiell) energi pr volumenhet lik

$$u(E) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Her var $v(q)$ potensialforskjellen mellom platene i kondensatoren, slik at $v(q)\,dq$ representerte det arbeidet som måtte utføres for å øke ladningen på kondensatorplatene fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$. Følgelig blir U den totale potensielle energien lagret i kondensatoren når vi har ladet den opp fra 0 til en endelig ladning $\pm Q$.
Dette betyr at vi har to alternative måter å bestemme den potensielle energien på: Vi kan assosiere U med ladningen Q og bruke den første formelen, selvsagt forutsatt at vi kjenner $v(q)$. Alternativt kan vi assosiere U med det elektriske feltet E og bruke formelen

$$U = \int_V u(E)\,dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dV$$

dersom vi vet hvordan feltet ser ut i hele volumet V.
I denne oppgaven er systemet veldig enkelt, og vi kjenner både metallkulas potensial når den har en ladning q,

$$v(q) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

og det elektriske feltet i hele rommet utenfor kula,

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

når den er ladet opp. Det er selvsagt tilstrekkelig å beregne den potensielle energien U på en av måtene, men la oss gjøre det med begge metoder og se at svaret blir det samme.
U assosiert med ladningen Q:

$$U = \int_0^Q v(q)\,dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

U assosiert med feltet E:

$$U = \int_V u(E)\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty E^2 \cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot 4\pi \int_R^\infty \frac{r^2\,dr}{r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Her brukte vi kulekoordinater, men ettersom E bare avhenger av r, kunne vi gjøre de to vinkelintegrasjonene "på direkten" og sette $dV = 4\pi r^2\,dr =$ volumet av et kuleskall med radius r og tykkelse dr.
Vi ser at svaret blir det samme i begge tilfeller. Vi kan altså velge om vi vil assosiere den potensielle energien med ladningene eller det elektriske feltet som ladningene omgir seg med.

12) Total ladning på parallellkoblingen er

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Ettersom $C_1 = Q_1/\Delta V$ og $C_2 = Q_2/\Delta V$, kan vi da skrive

$$Q = C_1\Delta V + C_2\Delta V = (C_1 + C_2)\Delta V$$

Den totale kapasitansen er (pr definisjon)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

slik at vi får

$$C = C_1 + C_2$$

Med andre ord: Kapasitansen til to parallellkoblede kondensatorer er lik summen av kapasitansene til hver enkelt kondensator. Her har vi vist at det er slik for to kondensatorer. En kan enkelt generalisere til et vilkårlig antall kondensatorer:

$$C = \sum_i C_i$$

der summen over i går fra 1 til N = antall parallellkoblede kondensatorer.

13) Totalt spenningsfall over seriekoblingen er

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Ettersom $C_1 = Q/\Delta V_1$ og $C_2 = Q/\Delta V_2$, kan vi da skrive

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

Total kapasitans er

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

slik at vi får

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Med andre ord: Den inverse kapasitansen til to seriekoblede kondensatorer er lik summen av de inverse kapasitansene til hver enkelt kondensator. Her har vi vist at det er slik for to kondensatorer. En kan enkelt generalisere til et vilkårlig antall kondensatorer:

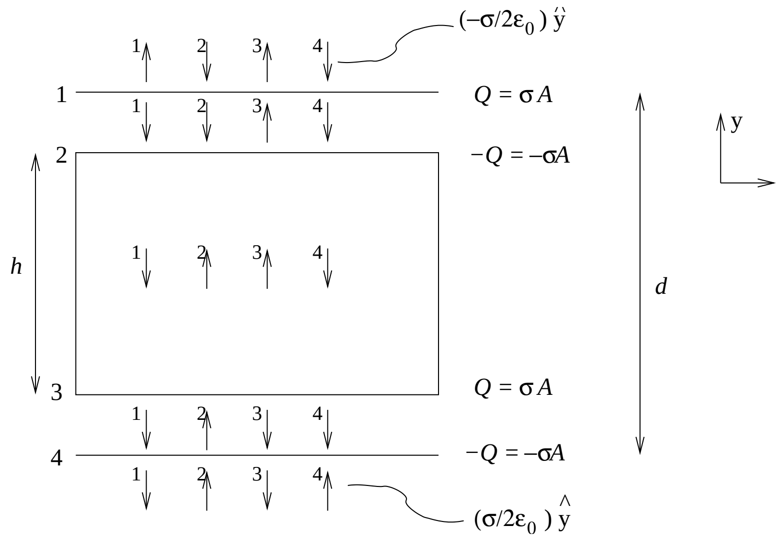
$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

der summen over i går fra 1 til N = antall seriekoblede kondensatorer.

14) Det elektriske feltet fra de to kondensatorplatene vil indusere ladning på øvre og nedre flate av den innsatte metallskiva. I likevekt må vi ha null elektrisk felt inne i metallskiva. Det oppnår vi ved at det induseres en ladning $-Q$ på øvre flate og Q på nedre flate av metallskiva. Hvorfor nettopp $-Q$ og Q? Jo, fordi det elektriske feltet fra et uendelig stort ladet plan er uavhengig av avstanden til planet, og gitt ved flateladningstettheten σ:

$$E_0 = \sigma/2\varepsilon_0$$

I vårt tilfelle er $\sigma = Q/A$, der A er platearealet. Retningen på feltet fra et ladet plan er *bort fra* hvis det er positivt og *inn mot* hvis det er negativt. Vårt system blir da som vist i figuren nedenfor. Med f.eks. y-aksen oppover blir de ulike bidragene til det totale elektriske feltet i de ulike områdene dermed enten $(-\sigma/2\varepsilon_0)\hat{y}$ eller $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{y}$, se figuren.



Vi har her essensielt 4 uendelig store plan, to med ladningstetthet σ (1 og 3) og to med ladningstetthet $-\sigma$ (2 og 4). I figuren er bidragene til totalt felt fra hvert enkelt plan tegnet inn i alle de fem "ulike" områdene. Totalt elektrisk felt blir rett og slett vektorsummen i hvert område, så vi har

$$E = 0$$

på utsiden av kondensatoren og inne i metallskiva (som vi *måtte* ha). I de to områdene mellom metallskiva og de to kondensatorplatene ser vi at feltet blir

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

dvs det samme som vi hadde før vi satte inn metallskiva.
Så til det oppgaven spør om, nemlig potensialforskjellen mellom kondensatorplatene. Uten metallskiva blir potensialforskjellen

$$\Delta V = -\int_{(-)}^{(+)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

for da er $\boldsymbol{E} = (-\sigma/\varepsilon_0)\hat{y}$ i hele området mellom platene. (Vi velger selvsagt $d\boldsymbol{l} = dy\,\hat{y}$.)
Med metallskiva på plass blir potensialforskjellen

$$\Delta V = -\int_{(-)}^{(+)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\sigma(d-h)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma d}{3\varepsilon_0}$$

for nå er $\boldsymbol{E} = (-\sigma/\varepsilon_0)\hat{y}$ bare i de to områdene på hver side av metallskiva, med total utstrekning $d - h = d - 2d/3 = d/3$; inne i metallskiva er $E = 0$.
Konklusjon: Potensialforskjellen mellom kondensatorplatene blir tre ganger mindre.
Kommentar: Dette var en veldig omstendelig løsning. Ikke desto mindre synes jeg det kan være en grei måte å tenke på i slike oppgaver med "uendelig" store ladete plan. Det eneste vi trenger å vite er at feltet fra ett plan er $\sigma/2\varepsilon_0$, med retning bort fra eller inn mot planet hvis

hhv positiv eller negativ ladning. I tillegg må vi vite at $E = 0$ inne i et metall, og endelig at superposisjonsprinsippet gjelder for det elektriske feltet.

15) Et uendelig stort uniformt ladet plan med ladning pr flateenhet σ resulterer i et konstant elektrisk felt $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Hvis σ er positiv, blir E rettet bort fra planet, og omvendt hvis σ er negativ. Vi vet videre at potensialet *avtar* dersom vi beveger oss *med* det elektriske feltet. Husk: Avtagende potensial når vi fjerner oss fra en positiv ladning, ettersom en positiv testladning må få avtagende potensiell energi når den fjerner seg fra en positiv ladning.
Her har vi nettopp et positivt ladet plan, så potensialet må altså avta med avstanden til planet. Det er valgt $V = -20$ V på planet, så V må her være negativt overalt.
(Hvis planet hadde vært negativt ladet, med ladningstetthet $\sigma = -4$ nC/m^2, hadde vi hatt $V = 0$ i avstand $d = \Delta V/E = \Delta V \cdot 2\varepsilon_0/\sigma = 20 \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 10^{-9} \simeq 0.09$ m.)

16) Dersom det elektriske feltet er E_0 mellom metallplatene før vi setter inn de to dielektriske lagene, blir feltstyrken redusert med en faktor $1/\varepsilon_{rj}$ inne i dielektrikum j ($j = 1, 2$). Her er ε_{rj} relativ permittivitet til dielektrikum j, dvs $\varepsilon_{r1} = 4$ og $\varepsilon_{r2} = 2$. Feltstyrken forblir uendret i vakuumlaget mellom $x = 2a$ og $x = 3a$. Dermed:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4}E_0 \qquad 0 < x < 2a \\ E &= E_0 \qquad 2a < x < 3a \\ E &= \frac{1}{2}E_0 \qquad 3a < x < 5a \end{aligned}$$

Dette betyr at potensialet avtar minst mellom 0 og $2a$, raskest (mer presist: fire ganger raskere) mellom $2a$ og $3a$, og "mellomraskt" (mer presist: dobbelt så raskt som mellom 0 og $2a$) mellom $3a$ og $5a$. Bare kurve 3 kan stemme med dette.

17) Se oppgave 7: Der ble vi enige om at det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ er konstant i hele området mellom platene. Videre er $\boldsymbol{P} = 0$ i området til høyre: Ingen elektriske dipoler å rette inn her som vi har vakuum! I dielektrikumet, derimot, har vi slike elektriske dipoler som rettes inn og resulterer i en polarisering $\boldsymbol{P}$ i samme retning som $\boldsymbol{E}$. Da passer det jo aldeles utmerket at den elektriske forskyvningen $\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ blir størst i området til venstre. Dette stemmer også bra med at $\boldsymbol{D}$ kan assosieres med fri ladning: I oppgave 7 konkluderte vi nettopp med at vi hadde størst fri ladning på venstre halvdel av metallplatene, dvs der vi har dielektrikum.

18) Med utgangspunkt i oppgavene 7 og 17 har vi blitt enige om at det elektriske feltet er konstant i hele området mellom platene og at tettheten av fri ladning på metallplatene er størst på den siden der vi har dielektrikumet til stede. Vi kan altså skrive

$$E_1 = \frac{\sigma^{(1)}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f^{(1)} - \sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_0}$$

for feltet i område 1, til venstre, og

$$E_2 = \frac{\sigma^{(2)}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f^{(2)}}{\varepsilon_0}$$

for feltet i område 2, til høyre. Her er $\sigma^{(1)}$ og $\sigma^{(2)}$ *total* ladningstetthet henholdsvis til venstre og høyre, $\sigma_f^{(1)}$ og $\sigma_f^{(2)}$ er *fri* ladningstetthet (dvs på metallplatene) henholdsvis til venstre og høyre, og $\sigma_i^{(1)}$ er *indusert* ladningstetthet (dvs på overflaten av dielektrikumet) til venstre. Disse feltene skal altså være like, $E_1 = E_2 = E$, og potensialforskjellen mellom platene er bestemt av denne feltstyrken:

$$\Delta V = Ed$$

La oss for sikkerhets skyld kjapt repetere de ulike sammenhengene og størrelsene vi innførte i forbindelse med polarisering i lineære medier. Vi antok at polariseringen er proporsjonal med det elektriske feltet:

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

der χ_e = mediets *susceptibilitet*. Med *definisjonen*

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

kunne vi da skrive

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\
&= (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
&= \varepsilon \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

der vi hadde innført $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ = mediets *relative permittivitet og* $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$ = *mediets* permittivitet.

Det elektriske dipolmomentet til dielektrikumet i område 1 er

$$p_1 = (\sigma_i^{(1)} A/2)d$$

slik at polariseringen her blir

$$P_1 = \frac{p_1}{(Ad)/2} = \sigma_i^{(1)}$$

ettersom volumet av område 1 er $Ad/2$. Den elektriske forskyvningen i område 1 blir da

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 + P_1 = \sigma_f^{(1)} - \sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(1)} = \sigma_f^{(1)}$$

I område 2 har vi $P_2 = 0$, slik at

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 = \sigma_f^{(2)}$$

Samtidig har vi

$$D_1 = \varepsilon E_1$$

La oss se på hva total ladning på metallplatene blir:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{A}{2}\left(\sigma_f^{(1)} + \sigma_f^{(2)}\right) \\
&= \frac{A}{2}(D_1 + D_2) \\
&= \frac{A}{2}(\varepsilon E_1 + \varepsilon_0 E_2) \\
&= \frac{A}{2} E(\varepsilon + \varepsilon_0) \\
&= \frac{A}{2}\frac{\Delta V}{d}\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)
\end{aligned}$$

Pr definisjon er kondensatorens kapasitans lik

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

slik at her får vi

$$C = \frac{A}{2d}\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1) = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} C_0$$

med $C_0 = \varepsilon_0 A/d$.
Ikke uventet har vi funnet at denne kondensatoren er en parallellkobling av to kondensatorer, begge med plateareal $A/2$, plateavstand d, og den ene fylt med vakuum og den andre fylt med et dielektrikum med permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Vi kunne altså ha skrevet ned resultatet mer eller mindre direkte, med bruk av resultatet i oppgave 12.

19) La oss i denne oppgaven ta den enkle løsningen først, utstyrt med den visdommen som vi opparbeidet oss i oppgave 18. Her har vi en *seriekobling* av to kapasitanser: Begge har plateareal A og plateavstand $d/2$, den ene er luftfylt og den andre er fylt med et dielektrikum med permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Da kan vi benytte oss av resultatet i oppgave 13. Kapasitansen til halvdelen med dielektrikum er

$$C_1 = \varepsilon\frac{A}{d/2} = 2\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

mens kapasitansen til den luftfylte halvdelen er

$$C_2 = \varepsilon_0\frac{A}{d/2} = 2\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

Total kapasitans blir ifølge oppgave 13

$$\begin{aligned}
C &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} \\
&= \varepsilon_0\frac{A}{d}\left(\frac{1}{2\varepsilon_r} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \\
&= \varepsilon_0\frac{A}{d}\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \\
&= \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}C_0
\end{aligned}$$

Også i denne oppgaven kan vi gå veien om elektrisk forskyvning, indusert og fri ladning osv, og bestemme sammenhengen mellom total fri ladning Q og potensialforskjellen ΔV. Vi har

$$D = \sigma_f = Q/A$$

Her er D konstant i hele området mellom platene ettersom den frie ladningen er jevnt fordelt utover metallplatene (ingen forskjell på høyre og venstre her). Vi har videre

$$D = \varepsilon E_1$$

for sammenhengen mellom elektrisk forskyvning og elektrisk felt i område 1 (= det nederste, med dielektrikum). Dessuten er

$$D = \varepsilon_0 E_2$$

for sammenhengen mellom elektrisk forskyvning og elektrisk felt i område 2 (= det øverste, med vakuum). Potensialforskjellen mellom platene er

$$\Delta V = E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2}$$

som framkommer ved å ta veiintegralet av $\boldsymbol{E}$ fra den ene til den andre plata. Men da er vi omtrent i mål:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2} \\
&= \frac{d}{2}\left(\frac{D}{\varepsilon} + \frac{D}{\varepsilon_0}\right) \\
&= \frac{d}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{A\varepsilon_r} + \frac{Q}{A}\right) \\
&= \frac{Qd}{2\varepsilon_0 A} \cdot \frac{1+\varepsilon_r}{\varepsilon_r}
\end{aligned}$$

slik at

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} C_0$$

Det samme som vi fant ved å bruke formelen for seriekobling av to kapasitanser!

20) Her er det elektriske feltet i området mellom indre og ytre metallsylinder oppgitt, så det er bare å regne ut potensialforskjellen direkte:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\, dr \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{dr}{r} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}(\ln b - \ln a) \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Følgelig blir sylinderkondensatorens kapasitans

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln b/a}$$

For enkelte vil kanskje det største problemet i denne oppgaven være å holde styr på fortegnet, slik at en ender opp med alternativ C. Da må en huske: Kapasitans er (pr definisjon) en *positiv* størrelse. Ettersom $a < b$, må alt. D være det riktige, fordi logaritmen til et tall mindre enn 1 er negativt.

Dessuten vil vi ha høyest elektrisk potensial ved den positivt ladete lederen. Det følger av definisjonen av elektrisk potensial, som potensiell energi pr ladningsenhet. Tenk deg en liten positiv ladning. Den må da opplagt ha størst potensiell energi hvis vi velger å plassere den i et punkt nær den positivt ladete lederen. Altså har vi her også høyest verdi på det elektriske potensialet. For en liten negativ ladning blir det omvendt: Den vil ha høyest potensiell energi hvis vi velger å plassere den i et punkt nær den negativt ladete lederen. Da må vi her ha *lavest* verdi på det elektriske potensialet, slik at når vi ganger potensialet med den lille negative ladningen, ender vi opp med størst positiv verdi på potensiell energi.

Sluttkommentar: Synes du det var mye å gjøre på denne øvingen? Da er vi enige. Semesterprøven vil inneholde 25 oppgaver. Det er klart at det da ikke blir 25 oppgaver med samme omfang som enkelte av oppgavene i denne øvingen. Dette gjelder spesielt endel av de siste oppgavene, hvor det virkelig er ganske mye å gjøre, ikke minst fordi det er forholdsvis nytt og uvant stoff. På den annen side: Oppgaver som f.eks. nr 5 bør ikke ta lang tid å besvare. Enten vet en at $E = 0$ inne i ei metallkule i likevekt, eller så vet en det ikke.
Med 25 oppgaver og 2 timer har du 4.8 minutter til rådighet pr oppgave på midtsemesterprøven. Siden alle oppgaver gir samme uttelling (med riktig svar!), kan det jo være en ide å gjøre unna de "raske" oppgavene først.