NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME I
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Fredag 8. juni 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 4 oppgaver, i alt 10 deloppgaver som alle teller like mye under bedømmelsen.
Løsningsforslaget er på 8 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

a) I metallskiva vil frie ladninger (elektroner) vandre til og fra overflatene inntil feltet fra disse presis *kansellerer* det ytre feltet inne i lederen. Likevekt betyr at vi må ha $\boldsymbol{E} = 0$ inne i lederen. Et felt $\boldsymbol{E} \neq 0$ inne i lederen ville resultere i en strøm. All netto ladning vil legge seg på lederens overflate. Gauss' lov kan brukes til å vise dette.
I et dielektrikum vil permanente elektriske dipoler få en tendens til å innrette seg langs det ytre feltet. (Eventuelt vil det induseres elektriske dipoler som peker i samme retning som det ytre feltet.) Netto makroskopisk effekt blir også her en indusert ladning på overflaten. Denne induserte ladningen bidrar til å *redusere* feltstyrken inne i skiva, sammenlignet med feltet utenfor.

b)

$$p = \int dp = \int 2s\, dq = \int 2s\,\lambda\, ds = \int_0^{d/2} 2s \cdot 2\lambda_0 \frac{s}{d}\, ds = \frac{4\lambda_0}{d} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\lambda_0 d^2$$

c) Her vil vektoren $\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}$ peke inn i planet for alle "biter" av stanga, ettersom elektrisk kraft virker mot høyre på den positive halvdelen av stanga og mot venstre på den negative halvdelen av stanga. Videre er $\boldsymbol{r} \perp d\boldsymbol{F}$ for alle biter av stanga. Dermed:

$$d\tau = |\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}| = r \cdot dF = r \cdot E_0 \cdot dq = s \cdot E_0 \cdot \lambda \cdot ds = s \cdot E_0 \cdot 2\lambda_0 \cdot \frac{s}{d} \cdot ds$$

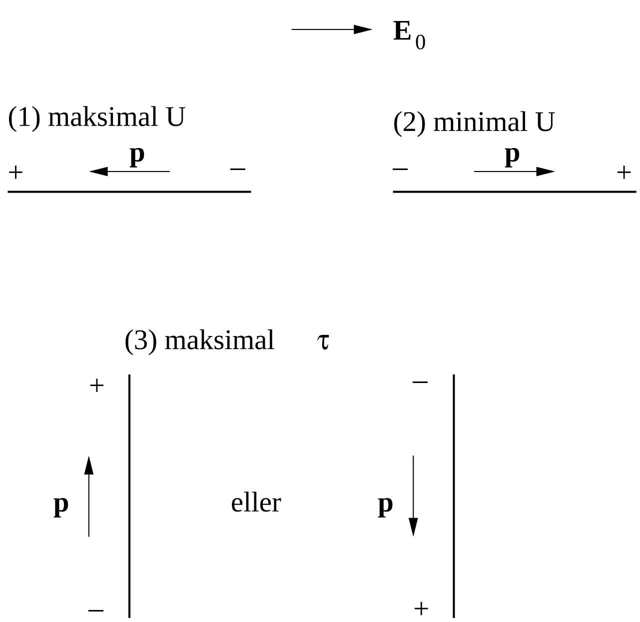
Totalt dreiemoment blir følgelig

$$\tau = \int |\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}| = \frac{2\lambda_0 E_0}{d} \int_{-d/2}^{d/2} s^2\, ds = \frac{2\lambda_0 E_0}{d} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\lambda_0 d^2 E_0$$

Og vi har allerede slått fast at $\boldsymbol{\tau}$ peker inn i papirplanet. Vi ser at

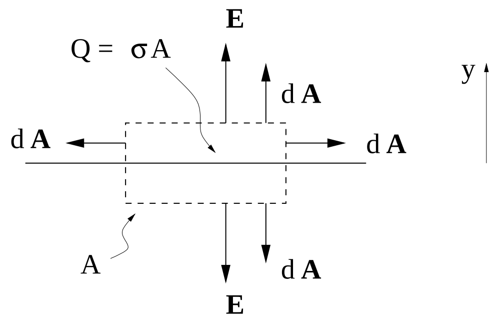
$$\tau = p\, E_0 = |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_0|,$$

noe vi godt kunne ha benyttet, og dermed skrevet ned svaret direkte.
Potensiell energi for elektrisk dipol i elektrisk felt: $U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_0$. Dermed:



OPPGAVE 2

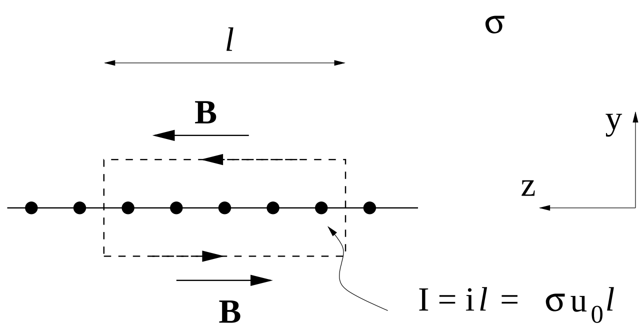
a) Av symmetrigrunner har vi $\boldsymbol{E} \sim +\hat{y}$ over og $\boldsymbol{E} \sim -\hat{y}$ under planet. Og av samme grunn har vi $\boldsymbol{B} \sim +\hat{z}$ over og $\boldsymbol{B} \sim -\hat{z}$ under planet.
Følgende figur viser hvordan $\boldsymbol{E}$ bestemmes ved hjelp av Gauss' lov:



Dermed:

$$2E_0 A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Følgende figur viser hvordan $\boldsymbol{B}$ bestemmes ved hjelp av Amperes lov:



Strøm i x-retning pr lengdeenhet (dvs: pr lengdeenhet på tvers, dvs pr "z-enhet"):

$$\boldsymbol{i} = \frac{dI}{dz}\hat{x} = \frac{dQ/dt}{dz}\hat{x} = \frac{\sigma dA/dt}{dz}\hat{x} = \frac{\sigma dx\, dz/dt}{dz}\hat{x} = \sigma\frac{dx}{dt}\hat{x} = \sigma u_0 \hat{x}$$

Dermed:

$$2B_0 l = \mu_0 i l = \mu_0 \sigma u_0 l \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 \sigma u_0}{2}$$

b) Siden superposisjonsprinsippet gjelder både for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$, finner vi feltene ved å legge sammen bidragene fra de to planene. Fra det negativt ladde planet har vi bidragene $-E_0\,\hat{y}$ og $-B_0\,\hat{z}$ på oversiden ($y > -d$) og $E_0\,\hat{y}$ og $B_0\,\hat{z}$ på undersiden ($y < -d$). Totale felt blir dermed $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$ for $y > 0$ og $y < -d$, dvs "utenfor", mens mellom planene har vi

$$\boldsymbol{E} = -2E_0\,\hat{y} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{y} \quad , \quad \boldsymbol{B} = -2B_0\,\hat{z} = -\mu_0 \sigma u_0\,\hat{z}$$

Den gjensidige elektriske kraften F_E er åpenbart tiltrekkende siden planene har motsatt ladning. Den magnetiske kraften F_B er frastøtende, for eksempel fordi de to planene representerer strømmer i motsatt retning. Vi kan også se på en positiv ladning i det øverste planet som beveger seg med hastighet $u_0\,\hat{x}$ i magnetfeltet $-B_0\,\hat{z}$ fra det nederste planet. Retningen på den magnetiske kraften er da gitt ved $\hat{x}\times(-\hat{z})=\hat{y}$, dvs oppover, altså frastøtende.

Vi finner forholdet mellom disse to kreftene ved å regne ut elektrisk kraft F_E og magnetisk kraft F_B som virker på ladningen Q på et areal A på en av platene:

$$F_E = QE_0 \quad\Rightarrow\quad f_E = \frac{F_E}{A} = \frac{QE_0}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$F_B = Qu_0B_0 \quad\Rightarrow\quad f_B = \frac{F_B}{A} = \frac{Q}{A}u_0B_0 = \frac{\mu_0\sigma^2u_0^2}{2}$$

Forholdet mellom disse blir

$$\kappa = \frac{f_B}{f_E} = \mu_0\varepsilon_0u_0^2$$

Her er

$$\mu_0\varepsilon_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9} = \frac{1}{9\cdot 10^{16}},$$

også kjent som $1/c^2$, med $c=$ lyshastigheten $=3\cdot 10^8$ m/s. Med $u_0=3\cdot 10^6$ m/s blir $\kappa=10^{-4}$.

Kommentar: Vi ser at uansett hvor fort planene beveger seg, vil den tiltrekkende elektriske kraften overvinne den frastøtende magnetiske. Ikke så overraskende, kanskje: Hvis *du* var en av ladningene i et av planene, ville du kun føle den tiltrekkende elektriske kraften fra ladningene i det andre planet. Det ville fremdeles være et magnetfelt der du var, men siden din hastighet (dvs målt av deg selv) nå ville være null, ville du ikke bli utsatt for noen magnetisk kraft.

c) Vi konstaterer innledningsvis at partikkelen vil forbli i xy-planet: Med magnetfeltet i z-retning og det elektriske feltet i y-retning kan det umulig bli noen kraftkomponent i z-retning. Dermed er og blir $z=v_z=0$, og vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\,\hat{x}+y\,\hat{y}\\
\boldsymbol{v} &= v_x\,\hat{x}+v_y\,\hat{y} = \dot{x}\,\hat{x}+\dot{y}\,\hat{y}\\
\boldsymbol{a} &= a_x\,\hat{x}+a_y\,\hat{y} = \dot{v}_x\,\hat{x}+\dot{v}_y\,\hat{y} = \ddot{x}\,\hat{x}+\ddot{y}\,\hat{y}
\end{aligned}$$

for henholdsvis posisjonen, hastigheten og akselerasjonen til partikkelen. Newtons andre lov og Lorentzkraften gir da

$$\begin{aligned}
m\boldsymbol{a} &= m\dot{v}_x\,\hat{x}+m\dot{v}_y\,\hat{y} = q\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\\
&= q\,(E\,\hat{y}+(v_x\,\hat{x}+v_y\,\hat{y})\times B\,\hat{z}) = qBv_y\,\hat{x}+(qE-qBv_x)\,\hat{y}
\end{aligned}$$

dvs

$$m\dot{v}_x = qBv_y \quad , \quad m\dot{v}_y = qE-qBv_x$$

Vi løser disse to ligningene henholdsvis med hensyn på v_y og v_x,

$$\begin{aligned}
v_y &= \frac{m}{qB}\,\dot{v}_x\\
v_x &= \frac{E}{B}-\frac{m}{qB}\,\dot{v}_y
\end{aligned}$$

deriverer med hensyn på tiden t,

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= \frac{m}{qB}\,\ddot{v}_x \\ \dot{v}_x &= -\frac{m}{qB}\,\ddot{v}_y \end{aligned}$$

setter disse inn i de opprinnelige ligningene,

$$\begin{aligned} m\left(-\frac{m}{qB}\,\ddot{v}_y\right) &= qBv_y \\ m\left(\frac{m}{qB}\,\ddot{v}_x\right) &= qE - qBv_x \end{aligned}$$

ordner, og får

$$\begin{aligned} \ddot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y &= 0 \\ \ddot{v}_x + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x &= \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \cdot \frac{E}{B} \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise, med "syklotronfrekvensen" $\omega = qB/m$.

Vi sjekker at den oppgitte banen tilfredsstiller startbetingelsene. Hastighetskomponentene blir

$$v_x = \dot{x} = r_0\,(\omega - \omega\cos\omega t) \quad , \quad v_y = \dot{y} = r_0\omega\sin\omega t$$

Dermed har vi

$$x(0) = r_0(0-0) = 0 \;\;,\;\; y(0) = r_0(1-1) = 0 \;\;,\;\; v_x(0) = r_0(\omega - \omega) = 0 \;\;,\;\; v_y(0) = r_0\omega \cdot 0 = 0,$$

så alle startbetingelser er oppfylt. Deretter sjekker vi at den oppgitte banen er en løsning av bevegelsesligningene. Vi kan da enten regne ut de tredje deriverte av x og y og sette inn i de oppgitte differensialligningene for v_x og v_y, eller vi kan nøye oss med de andre deriverte og sette inn i de to ligningene vi fikk ved å bruke Newtons andre lov. Begge deler går like bra, jeg velger her sistnevnte alternativ:

$$a_x = \ddot{x} = r_0\omega^2\sin\omega t \quad , \quad a_y = \ddot{y} = r_0\omega^2\cos\omega t$$

De to ligningene

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qBv_y \\ m\dot{v}_y &= qE - qBv_x \end{aligned}$$

blir da

$$\begin{aligned} mr_0\omega^2\sin\omega t &= qBr_0\omega\sin\omega t \\ mr_0\omega^2\cos\omega t &= qE - qBr_0\,(\omega - \omega\cos\omega t) \end{aligned}$$

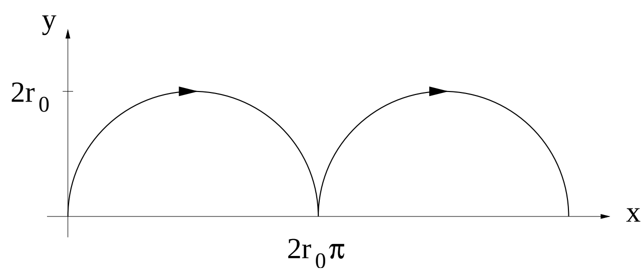
eller

$$\begin{aligned} m\omega &= qB \\ 0 &= qE - qB\omega r_0 \end{aligned}$$

Her er første ligning oppfylt siden $\omega = qB/m$, mens andre ligning er oppfylt med

$$r_0 = \frac{E}{\omega B} = \frac{mE}{qB^2}$$

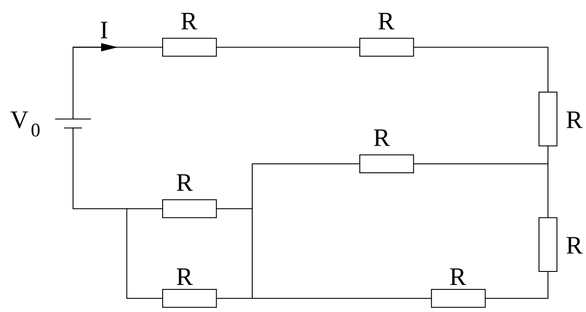
Kommentar 1: Partikkelens bane $(x(t), y(t))$ blir en såkalt sykloide, dvs samme bane som følges av f.eks. en liten edderkopp som klorer seg fast ytterst på sykkeldekket ditt (med r_0 lik hjulradien):



Kommentar 2: Det kunne kanskje også være av interesse å regne ut tallverdier for r_0 for et par eksempler. Anta f.eks. $E = 100$ V/m og $B = 0.5 \cdot 10^{-4}$ T, omtrentlig riktig ved jordoverflaten, og $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Da blir $r_0 = 2.5 \cdot 10^{29}\, m$, med massen m målt i kg. Det gir 23 cm for et elektron, 418 m for et proton, og 14.6 km for et Cl^- anion. I et slik felt vil nok ingen av disse partiklene i praksis følge slike baner, på grunn av kollisjoner med andre partikler. Det er imidlertid ikke vanskelig å gi r_0 nærmest en hvilken som helst verdi ved å justere E og/eller B. Skrur vi B opp til 1 T, blir f.eks. r_0 ca 0.6 nm for et elektron, og da kan elektronet fullføre mange ”runder” mellom to kollisjoner. Men da befinner vi oss plutselig i et ”regime” der kvantemekanikken banker på døra, og mange spennende effekter dukker opp!

OPPGAVE 3

a) Ved stasjonære forhold (DC) går det null strøm i alle grener hvor vi har en kondensator. Dermed kan alle kondensatorene erstattes med åpne kretser når kretsens totale motstand R_t, og derved strømmen $I = V_0/R_t$ skal bestemmes:



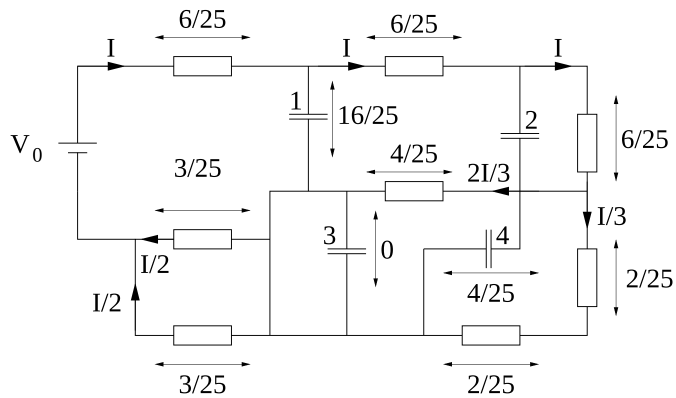
Ved hjelp av reglene for serie- og parallellkobling av motstander finner vi

$$R_t = R + R + R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{25R}{6}$$

og dermed

$$I = \frac{V_0}{R_t} = \frac{6V_0}{25R} = \frac{6 \cdot 1.25 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^6} = 0.3\,\mathrm{mA}$$

Ladningene på de ulike kondensatorene bestemmes deretter ved å finne spenningsfallene over dem:



Tallene i figuren over angir de ulike spenningsfallene, i enheter av V_0. Dermed:

$$Q_1 = V_1 C = \frac{16}{25} V_0 C = 0.8\mu\mathrm{C} \qquad Q_2 = V_2 C = \frac{6}{25} V_0 C = 0.3\mu\mathrm{C}$$

$$Q_3 = V_3 C = 0 \qquad Q_4 = V_4 C = \frac{4}{25} V_0 C = 0.2\mu\mathrm{C}$$

b) Den påtrykte spenningen må tilsvare spenningsfallet, både over kondensatoren og motstanden. Dermed:

$$\begin{aligned} V_0 \cos\omega t &= V_C = \frac{Q(t)}{C} \\ V_0 \cos\omega t &= V_R = R I_R(t) \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned} Q(t) &= V_0 C \cos\omega t \\ I_R(t) &= \frac{V_0}{R} \cos\omega t \\ I_C(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} = -\omega C V_0 \sin\omega t \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) = \frac{V_0}{R} \cos\omega t - \omega C V_0 \sin\omega t$$

Vi skriver denne på oppgitt form og bruker den oppgitte trigonometriske relasjonen:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha) = I_0 \cos\alpha \cos\omega t + I_0 \sin\alpha \sin\omega t$$

Ved sammenligning av disse to uttrykkene har vi

$$\begin{aligned} I_0 \cos\alpha &= \frac{V_0}{R} \\ I_0 \sin\alpha &= -\omega C V_0 \end{aligned}$$

Den andre av disse dividert med den første gir

$$\tan\alpha = -\frac{\omega C V_0}{V_0/R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\arctan(\omega RC)$$

Summen av kvadratet av hver av de to ligningene gir

$$I_0^2 = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 + (\omega C V_0)^2 \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{V_0}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2}$$

slik at impedansen er

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0} = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Hvis vinkelfrekvensen ω blir veldig liten, dvs $\omega \ll 1/RC$, har vi $Z \simeq R$. Og det virker jo fornuftig: Ingen likestrøm gjennom kondensatoren, som dermed kan erstattes med en åpen krets, hvoretter vi kun står igjen med motstanden R. [Faseforskyvningen blir da $\alpha \simeq 0$, som også er fornuftig: For en resistans R er spenningsfallet og strømmen i fase, $V_R = RI$.]

OPPGAVE 4

a) Gjensidig induktans M_i er pr definisjon forholdet mellom den magnetiske fluksen ϕ_i som omsluttes av ledersløyfe nr i ($i = 1, 2, 3$) og strømmen I_0 i ledersløyfe "nr 0" (her: den lange spolen):

$$M_i = \frac{\phi_i}{I_0} = \frac{\oint_i \boldsymbol{B}_0 \cdot d\boldsymbol{A}_i}{I_0}$$

(1) Her står $\boldsymbol{B}_0$ vinkelrett på $d\boldsymbol{A}_1$ slik at $\phi_1 = 0$ og $M_1 = 0$.

(2) Her er $\boldsymbol{B}_0$ parallell med $d\boldsymbol{A}_2$ slik at $\phi_2 = B_0 A_2 = \mu_0 n I_0 a^2$ og $M_2 = \mu_0 n a^2$.

(3) Her er $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{A}_3 = B_0 A_3 \cos\theta = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \cos\theta$. Den lille spolen har N viklinger og omslutter derfor totalt en magnetisk fluks $\phi_3 = N\mu_0 n I_0 \pi a^2 \cos\theta$. Den gjensidige induktansen blir dermed $M_3 = N\mu_0 n \pi a^2 \cos\theta$.

b) Nå blir $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{A}_3 = B_0 A_3 \cos\omega t = \mu_0 n I_0 \pi a^2 \cos\omega t$ (der vi, f.eks, har valgt $\theta = 0$ ved $t = 0$). Dermed blir den tidsavhengige magnetiske fluksen omsluttet av den lille spolen

$$\phi_3(t) = N\mu_0 n I_0 \pi a^2 \cos\omega t$$

Indusert elektromotorisk spenning i den lille spolen blir dermed

$$\mathcal{E}_3(t) = -\frac{d\phi_3(t)}{dt} = \omega N \mu_0 n I_0 \pi a^2 \sin\omega t$$

med amplitude

$$\mathcal{E}_{30} = \omega N \mu_0 n I_0 \pi a^2 = 1.2 \text{ V}$$