Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Maxwells ligninger: Fra integralform til differensialform ved hjelp av divergensteoremet og Stokes' teorem

Maxwells ligninger på integralform:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Divergensteoremet:

$$\oint_S \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{G} \, dV$$

Her er S en lukket flate som omslutter volumet V, mens $\boldsymbol{G}$ representerer et vilkårlig vektorfelt.
Divergens til en vektor $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{G} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (G_x\hat{x} + G_y\hat{y} + G_z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \end{aligned}$$

i kartesiske koordinater. I kule- eller sylinderkoordinater ser divergensoperatoren litt mer "komplisert" ut.
Merk: Divergensen til en vektor er en *skalar*, i motsetning til *gradienten* til en skalar, som er en *vektor*.

Anvender vi divergensteoremet på det elektriske feltet, kan vi skrive:

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \, dV$$

Netto ladning q i volumet V kan uttrykkes ved (rom-)ladningstettheten ρ:

$$q = \int_V \rho \, dV$$

Dermed må vi, ifølge Gauss' lov for $\boldsymbol{E}$, kunne skrive

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV$$

Ettersom dette skal være riktig for vilkårlige lukkede flater S (med tilhørende volum V), må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dette er Gauss' lov for det elektriske feltet på differensialform.

Anvender vi divergensteoremet på magnetfeltet, kan vi skrive:

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \, dV$$

Dermed må vi, ifølge Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$, kunne skrive

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \, dV = 0$$

Ettersom dette skal være riktig for vilkårlige lukkede flater S (med tilhørende volum V), må ikke bare dette *integralet* være lik null – *integranden* må også *overalt* være lik null:

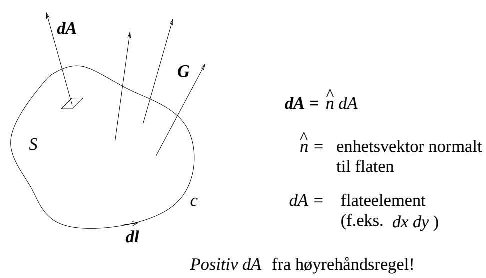
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Dette er Gauss' lov for magnetfeltet på differensialform.

Stokes' teorem:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{G}) \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_c \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$$

som uttrykt med ord sier at *veiintegralet* av en vektor $\boldsymbol{G}$ rundt en lukket kurve c er lik flateintegralet av *curl* til vektoren $\boldsymbol{G}$ over en flate S som "omsluttes" av kurven c. Følgende figur illustrerer de ulike størrelsene som er involvert:



Curl til en vektor $\boldsymbol{G}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{G} = \hat{x}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)$$

Anvender vi Stokes' teorem på $\boldsymbol{E}$, kan vi skrive:

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{A}$$

Ifølge Faradays lov har vi da

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{A} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

La oss holde flaten S fast, slik at det bare er $\boldsymbol{B}$ som kan variere med tiden på høyre side. Da kan vi ta tidsderivasjonen inn i integralet og bruke partiell derivert:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{A} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Ettersom dette skal være riktig for en vilkårlig (her: åpen, ikke lukket!) flate S, må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Anvender vi Stokes' teorem på $\boldsymbol{B}$, kan vi skrive:

$$\oint_c \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{A}$$

Ifølge Ampere–Maxwells lov har vi da

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \mu_0 \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Her er $\boldsymbol{j}$ strømtettheten (dvs strøm pr flateenhet) på flaten S, slik at total strøm gjennom S er

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$

La oss igjen holde flaten S fast, slik at det bare er $\boldsymbol{E}$ som kan variere med tiden på høyre side i ligningen over. Da kan vi ta tidsderivasjonen inn i integralet og bruke partiell derivert:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left(\mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{A}$$

Ettersom dette skal være riktig for en vilkårlig (her: åpen, ikke lukket!) flate S, må ikke bare disse *integralene* være like store – *integrandene* må også *overalt* være like store:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Oppsummert: Maxwells ligninger på differensialform:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$