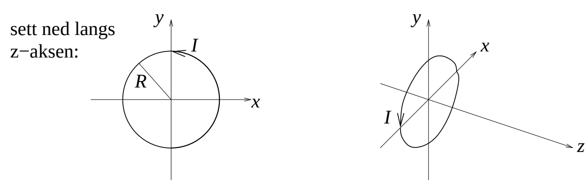
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Øving 13

Veiledning: Uke 15
Innleveringsfrist: Mandag 16. april

Oppgave 1

Ei sirkulær strømsløyfe med radius R fører en elektrisk strøm I. Strømsløyfa ligger i xy-planet med sentrum i origo. Retningen på I er mot klokka hvis vi har positiv z-akse ut av papirplanet. Vi skal i denne oppgaven bestemme det resulterende magnetfeltet $\boldsymbol{B}(0,0,z) = \boldsymbol{B}(z)$ *på symmetriaksen* til strømsløyfa (dvs på z-aksen).



a) Hvorfor er x- og y-komponenten av $\boldsymbol{B}(z)$ lik null? (Tips: Symmetri.)

b) I hvilken retning peker $\boldsymbol{B}(z)$ for positive og negative verdier av z?

c) Bruk Biot–Savarts lov,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \left(= \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \quad \right)$$

til å vise at

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

d) Bestem $B(z)$ i stor avstand fra strømsløyfa (dvs: til ledende orden når $z \gg R$) og uttrykk svaret ved hjelp av sløyfas *magnetiske dipolmoment* $m = |\boldsymbol{m}|$. Sammenlign dette uttrykket med det elektriske feltet i stor avstand fra en elektrisk dipol, uttrykt ved det elektriske dipolmomentet p (se øving 5).

– –

Magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ for ei plan, lukket strømsløyfe som omslutter et areal A er pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\,\hat{n}$$

der $\hat{n}$ er enhetsvektoren normalt til den plane omsluttede flaten. Magnetisk dipolmoment er altså en *vektor* (på samme måte som elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$). Positiv retning på $\boldsymbol{m}$ er definert ved hjelp av høyrehåndsregelen: Fire fingre i strømmens retning gir tommelen i samme retning som $\boldsymbol{m}$.

Kommentarer:

- Merk at ulike lærebøker bruker litt ulik notasjon her: Noen kaller det "magnetisk dipolmoment", andre bare "magnetisk moment". Noen bruker symbolet $\boldsymbol{\mu}$, andre bruker $\boldsymbol{m}$. Uansett, det er samme fysiske størrelse det dreier seg om! Vi velger å bruke symbolet $\boldsymbol{m}$ og kaller det magnetisk dipolmoment, i tråd med f.eks. den norske boka (LHL) og Griffiths. (TM bruker $\boldsymbol{\mu}$, det samme gjør Young og Freedman.)

- I likhet med elektrisk dipolmoment har også magnetisk dipolmoment en mer *generell* definisjon enn den vi innførte ovenfor. (Verden består jo tross alt ikke bare av parvise punktladninger med motsatt fortegn og plane strømsløyfer...!) La oss repetere den generelle definisjonen av elektrisk dipolmoment: Har vi en romladningstetthet $\rho(\boldsymbol{r})$, er elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\ d^3r$$

  Og har vi en strømfordeling gitt ved strømtettheten $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, er magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\ d^3r$$

  Her går integralet over "hele rommet", dvs der henholdsvis ρ og $\boldsymbol{j}$ er forskjellig fra null. For *spesialtilfellene* som vi (stort sett) ser på i dette kurset, nemlig parvise punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand beskrevet ved vektoren $\boldsymbol{d}$, og plane strømsløyfer med stasjonær strøm I som omslutter et areal beskrevet ved vektoren (noen ganger kalt "vektorarealet") $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, reduserer disse generelle definisjonene seg nettopp til

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

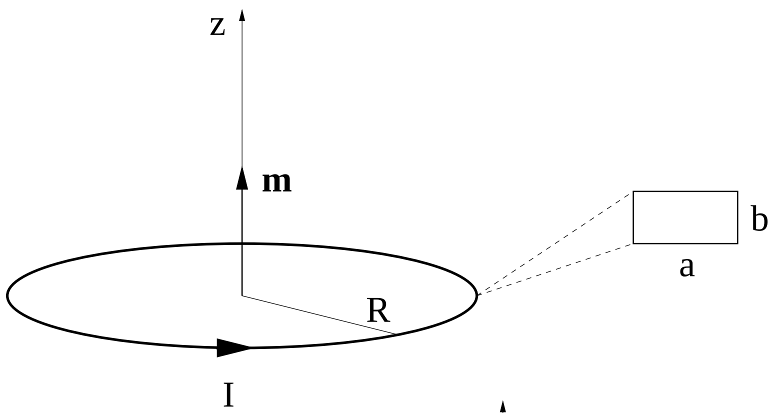
  og

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

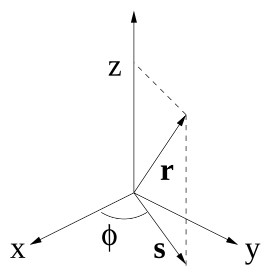
  I oppgave 2 skal du bestemme $\boldsymbol{m}$ med utgangspunkt i en gitt strømtetthet $\boldsymbol{j}$.

Oppgave 2

En strømførende ring har "midlere radius" R og et rektangulært tverrsnitt med høyde b og bredde a (slik at indre og ytre radius blir henholdsvis $R - a/2$ og $R + a/2$). Ringen fører en strøm I som er jevnt fordelt over det rektangulære tverrsnittet.



Sylinderkoordinater:



Vi velger koordinatsystem som vist i figuren, dvs med ringens symmetriakse langs z-aksen, og med ringens sentrum i origo.

a) Bruk den generelle definisjonen av magnetisk dipolmoment gitt i kommentarene på forrige side og vis at

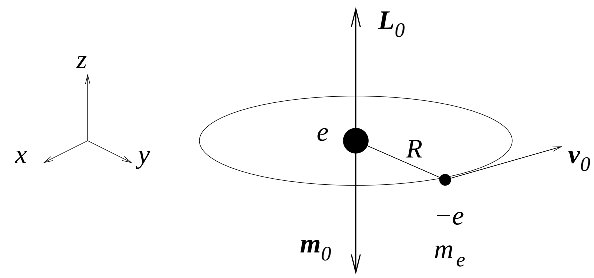
$$\boldsymbol{m} = \frac{I\pi R^3}{3a}\left[\left(1 + \frac{a}{2R}\right)^3 - \left(1 - \frac{a}{2R}\right)^3\right]\hat{z}$$

Tips: Bruk sylinderkoordinater (s, ϕ, z) med $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ og ϕ lik vinkelen mellom $\hat{x}$ og $\hat{s}$ (se figuren). Volumelement i sylinderkoordinater: $dV = dz \cdot s\, d\phi \cdot ds$

b) Vis at $\boldsymbol{m} = IA\,\hat{z}$ dersom ringen er tynn, dvs $a \ll R$. Her er A arealet som omsluttes av strømmen I.
[Legg merke til at $\boldsymbol{m}$ ikke avhenger av høyden b, slik at vi får $\boldsymbol{m} = IA\,\hat{z}$ også med en strømførende sylinder, dvs med b av samme størrelsesorden som R, ja, til og med med b mye større enn R.]

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi med utgangspunkt i en klassisk atommodell se nærmere på hvordan et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$ vil påvirke elektronets banebevegelse rundt atomkjernen. En slik *diamagnetisk respons* får vi i alle atomer. (Mer om ulike typer magnetisme i forelesningene etterhvert!) Her kan vi for enkelhets skyld ha et hydrogenatom i tankene, med ett elektron med ladning $-e$ i sirkulær bane (i xy-planet) med radius R rundt en kjerne med ladning $+e$.

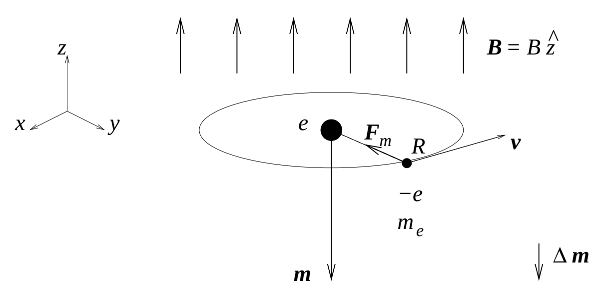


a) Uten et ytre magnetfelt tilstede er elektronets hastighet v_0. Vis at uniform sirkelbevegelse i Coulombfeltet fra atomkjernen da resulterer i en baneradius

$$R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Hva blir elektronets banedreieimpuls $\boldsymbol{L}_0$ og magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$? (Vi ser her bort fra elektronets indre dreieimpuls, dets *spinn*.)

b) Vi skrur nå på et magnetfelt $\boldsymbol{B}$, for enkelhets skyld rettet normalt på elektronets sirkulære bane.



Elektronet påvirkes da, i tillegg til Coulombkraften fra kjernen, av en magnetisk kraft $\boldsymbol{F}_m = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ slik at bevegelsesligningen endres. Resultatet blir en endret sammenheng mellom elektronets hastighet v og banens radius R. Anta at magnetfeltet kun endrer hastigheten, og ikke banens radius R, og bestem hastigheten v. Bestem også det magnetiske dipolmomentet $\boldsymbol{m}$ og vis at *endringen*

$$\Delta\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

alltid vil være *motsatt rettet* $\boldsymbol{B}$, uansett om $\boldsymbol{B}$ peker “opp” eller “ned” i forhold til retningen på elektronets opprinnelige magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_0$.

Kommentarer:

- Vi har tidligere konkludert med at et statisk magnetfelt aldri utfører noe arbeid på en ladning i bevegelse ettersom $\boldsymbol{F}_m \perp \boldsymbol{v}$. Et statisk magnetfelt kan altså ikke endre ladningens hastighet (i absoluttverdi), tilsynelatende i konflikt med det vi har funnet ovenfor. Poenget er imidlertid at vi starter med $B = 0$ og *skrur på* et magnetfelt. Dermed har vi ikke hele tiden et statisk magnetfelt, men et felt som i løpet av en viss tid må endre seg fra null til sin endelige verdi. Som vi skal se i forelesningene, vil et tidsavhengig magnetfelt skape (”indusere”) et elektrisk felt (Faradays induksjonslov), og et elektrisk felt kan som kjent endre hastigheten til et elektron.

- Fortegnet på den diamagnetiske responsen er et uttrykk for *Lenz' lov*, som kanskje noen har hørt om tidligere, og som vi skal komme tilbake til i forelesningene: Systemets ”respons” er slik at den påtrykte endringen *motvirkes*.

- Strengt tatt er det nødvendig med en *kvantemekanisk* beskrivelse for å forklare diamagnetisme “skikkelig”. Faktisk er det et *teorem* i statistisk fysikk som sier at for et system av klassiske ladete partikler i termisk likevekt i et ytre magnetfelt er det induserte magnetiske dipolmomentet *eksakt lik null* (Bohr - van Leeuwens teorem). Med andre ord: Diamagnetisme er en ren kvantemekanisk effekt! Likevel gir den enkle klassiske modellen med ett atom et brukbart kvalitativt bilde av effekten.