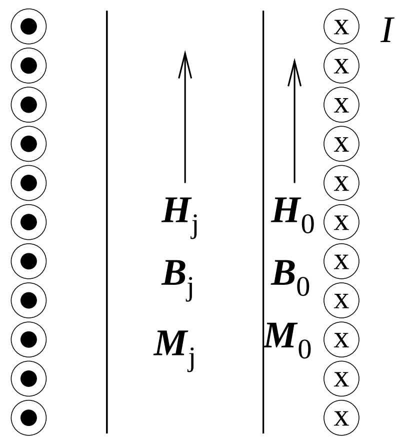
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Øving 15

Veiledning: Uke 17
Innleveringsfrist: Mandag 30. april

Oppgave 1



En sylinderformet jernstav med relativ permeabilitet $\mu_r = 2000$ er plassert koaksialt inne i en spole, men fyller bare delvis volumet inne i spolen. Spolen har en viklingstetthet $n = 2000\ \mathrm{m}^{-1}$ og strømmen i spoletråden er $I = 3$ A. Vi antar at både spolen og jernstaven er så lange at vi kan se bort fra randeffekter.
Anta i første omgang at vi har lineær respons i jernstaven, dvs $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$, og bestem $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{M}$ inne i spolen, både inne i (indeks j) og utenfor (indeks 0) jernstaven. (Husk at H-feltet bestemmes av "fri" strøm, mens B bestemmes av total strøm.)
Diskuter den beregnede verdien på M_j inne i jernstaven i lys av *metningsmagnetiseringen* i jern, dvs den maksimalt oppnåelige magnetiseringen, som du regnet ut i oppgave 1d i øving 14. Beregn deretter korrigert (maksimal) verdi for B_j.

Oppgitt:

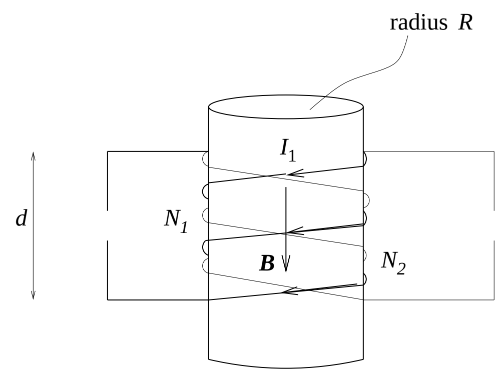
$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H}$$

(Siste linje er bare gyldig når vi har lineær respons.)

Et par tallsvar: $B_j = 15$ T ("ukorrigert"), $B_j = 2$ T ("korrigert").

Oppgave 2



Figuren viser to spoler 1 og 2 som begge er viklet opp på en sylinder med radius R. Vi antar at sylinderen har magnetiske egenskaper som vakuum, dvs vi ser bort fra en eventuell magnetisering i sylinderen. Spole 1 har N_1 viklinger, spole 2 har N_2 viklinger. Begge spolene er viklet opp på en lengde d som er (tilnærmet uendelig) lang i forhold til sylinderens radius. (Figuren er sånn sett ikke kvantitativt riktig...!) Du kan anta at begge spoler er tett viklet, og at hver vikling i begge spoler omslutter samme magnetiske fluks. (Spoletrådene er belagt med et isolerende materiale, f.eks. et lag plast, slik at en eventuell elektrisk strøm er nødt til å følge spoletråden. Denne antagelsen er forøvrig underforstått i alle slike oppgaver med spoler.)

a) Anta at det går en strøm I_1 i spole 1. Hva blir da styrken på magnetfeltet B inne i spolen? Hva blir videre *total* magnetisk fluks ϕ_1 som omsluttes av *hele* spoletråden i spole 1 (dvs alle de N_1 viklingene)? Hva blir total magnetisk fluks ϕ_2 som omsluttes av *hele* spoletråden i spole 2 (igjen: alle de N_2 viklingene)? (Merk: Det går altså ingen strøm i spole 2. Strømmen i spole 1 kan vi lage f.eks. ved å koble den til et batteri og en motstand.)

b) Forholdet mellom total omsluttet magnetisk fluks ϕ_1 og strømstyrken I_1 i strømsløyfa "selv" er, pr definisjon, en størrelse som kalles for strømsløyfas *selvinduktans* L:

$$L = \frac{\phi_1}{I_1}$$

Hva blir dermed selvinduktansen L til en slik lang sylinderformet spole med radius R, lengde d og N_1 viklinger?

c) Forholdet mellom total magnetisk fluks ϕ_2 som omsluttes av spole 2 og strømstyrken I_1 i spole 1 er, pr definisjon, en størrelse som kalles for *gjensidig induktans* M mellom de to strømsløyfene:

$$M = \frac{\phi_2}{I_1}$$

Hva blir dermed den gjensidige induktansen M mellom to slike lange sylinderformede spoler, begge viklet opp på en sylinder med radius R over en lengde d, og med henholdsvis N_1 og N_2 viklinger?

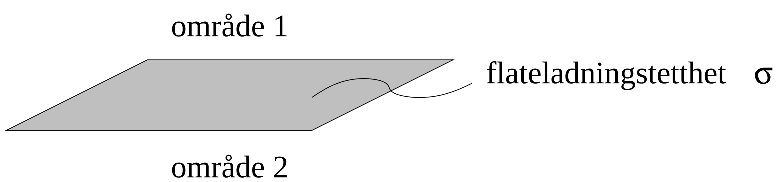
d) Bestem tallverdier for L og M (i SI-enheter) dersom $R = 1$ cm, $d = 60$ cm, $N_1 = 1200$ og $N_2 = 600$.
(Svar: $L = 9.5 \cdot 10^{-4}$, $M = 4.7 \cdot 10^{-4}$)

Kommentar: Vi skal komme tilbake til gjensidig induktans og selvinduktans i de siste forelesningene og se hvorfor dette er "nyttige" størrelser i endel sammenhenger.

Oppgave 3

Grenseflatebetingelser for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$:

La oss se litt på hvordan det elektriske feltet og magnetfeltet "oppfører seg" når vi krysser en *grenseflate*. Med grenseflate mener vi ikke annet enn en flate som deler rommet i områdene 1 ("over") og 2 ("under"). Vi ser først på det elektriske feltet:



Det elektriske feltet er *diskontinuerlig* dersom en slik grenseflate inneholder elektrisk ladning σ pr flateenhet:

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{n} \qquad (*)$$

Her er $\boldsymbol{E}_1$ feltet i område 1 like over flaten, $\boldsymbol{E}_2$ tilsvarende i område 2 like under flaten, mens $\hat{n}$ er en flatenormal (enhetsvektor) med retning oppover.
Du ser at ligningen $(*)$ er en kompakt måte å uttrykke at *parallellkomponenten* av $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig,

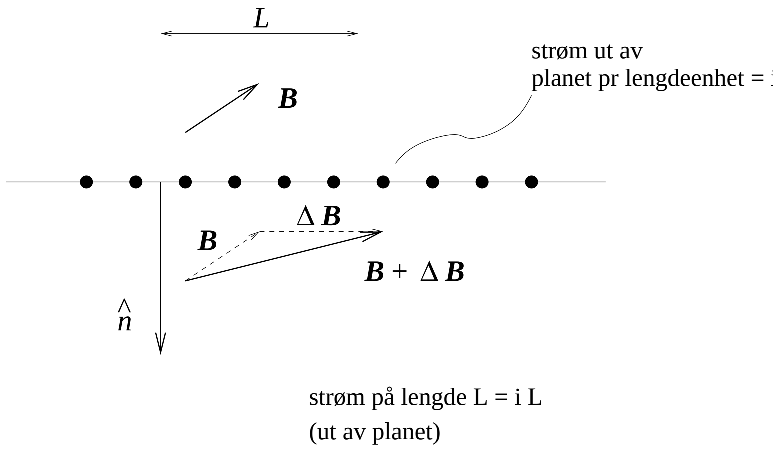
$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0,$$

mens *normalkomponenten* er diskontinuerlig,

$$E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

når vi krysser grenseflaten.

Vi ser deretter på magnetfeltet:



Her står altså grenseflaten normalt på papirplanet. Det magnetiske feltet er *diskontinuerlig* dersom det i en slik grenseflate går en elektrisk strøm $\boldsymbol{i}$ pr lengdeenhet:

$$\Delta \boldsymbol{B} = \mu_0 \, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

Dette betyr at både B_n og $B_{t\parallel}$ er kontinuerlige ved kryssing av planet, mens $B_{t\perp}$ er diskontinuerlig med et "sprang" $\mu_0 i$. Her har vi dekomponert tangentialkomponenten B_t av $\boldsymbol{B}$ i en komponent parallelt med strømretningen, $B_{t\parallel}$, og en komponent normalt til strømretningen, $B_{t\perp}$.

a) Se på tidligere øvingsoppgaver og forelesningsnotatene dine og finn et par eksempler der du kan kontrollere at disse grenseflatebetingelsene er oppfylt.

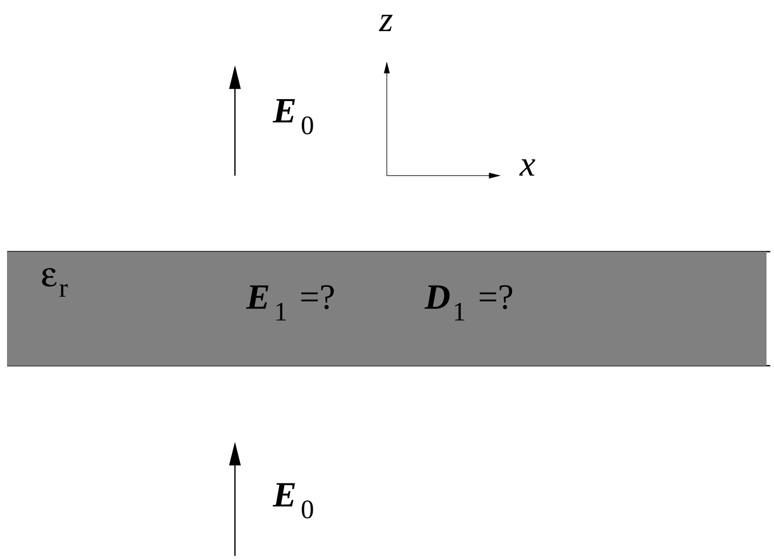
Dersom "systemet" vårt inneholder dielektriske og/eller magnetiserbare medier, kan det tenkes at vi har grenseflater hvor vi vet hva *fri* ladning σ_f pr flateenhet og *fri* strøm $\boldsymbol{i}_f$ pr lengdeenhet er. (Men vi kan kanskje ikke sånn uten videre si hva *total* ladning σ pr flateenhet eller *total* strøm $\boldsymbol{i}$ pr lengdeenhet er.) Da må vi i tillegg benytte oss av følgende grenseflatebetingelser for normalkomponenten D_n til den elektriske forskyvningen,

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f,$$

samt tangentialkomponenten $\boldsymbol{H}_t$ til H-feltet,

$$\Delta \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{i}_f \times \hat{n}$$

b) La oss prøve oss på et par eksempler hvor vi må bruke de ulike grenseflatebetingelsene for å bestemme de aktuelle feltstyrkene:
Anta at vi har et uniformt elektrisk felt $\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\hat{z}$. I dette feltet plasserer vi ei (alt i alt elektrisk nøytral) dielektrisk skive med tilnærmet uendelig stor utstrekning i x- og y-retning og tykkelse h i z-retning. Med andre ord, skiva er plassert på tvers i det ytre feltet. Materialet i skiva har relativ permittivitet ε_r.



Hva blir elektrisk forskyvning $\boldsymbol{D}_1$ og elektrisk felt $\boldsymbol{E}_1$ inne i den dielektriske skiva? Gjenta med skiva på *langs* i det ytre feltet! (Dvs: Med uendelig utstrekning i y- og z-retning og tykkelse h i x-retning.)
Gjør deretter tilsvarende for ei uendelig stor *magnetiserbar* skive med tykkelse h og relativ permeabilitet μ_r, henholdsvis på tvers og på langs i et uniformt ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}_0 = B_0\,\hat{z}$. Dvs: Bestem $\boldsymbol{H}_1$ og $\boldsymbol{B}_1$ inne i skiva.
Synes du resultatet ble uventet i noen av tilfellene? Hvordan vil du forklare at du får ulik elektrisk feltstyrke inne i den dielektriske skiva med skiva på tvers og på langs i det ytre feltet? Og tilsvarende: Hvordan vil du forklare at du får ulik magnetisk feltstyrke inne i den magnetiserbare skiva i de to tilfellene?