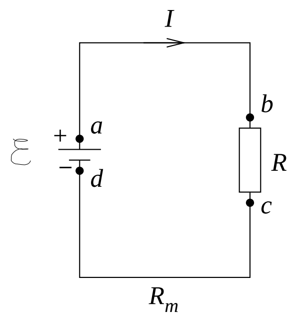
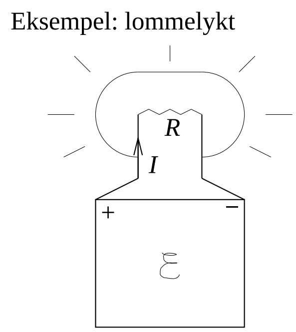
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007, uke12

Mandag 19.03.07

Likestrømkretser

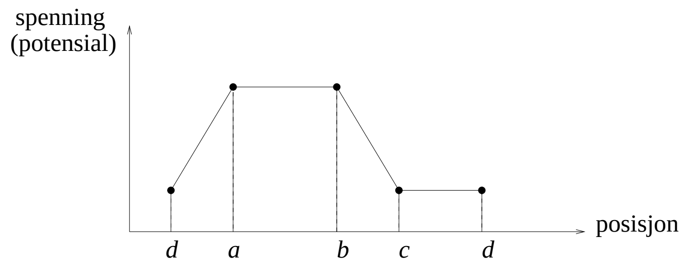
[FGT 27; YF 26; TM 25; AF 24.7; LHL 22]





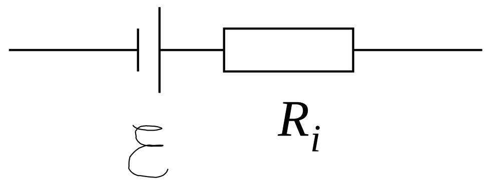
Likespenningskilde (f.eks. kjemisk batteri, solcelle etc.):
"Leverer" *elektromotorisk spenning* (ems) $\mathcal{E}$, dvs: sørger for å holde konstant potensialforskjell $\mathcal{E}$ mellom de to "polene" + og -.

Spenningsforhold i kretsen over (ΔV er endring i elektrisk potensial):



$a \to b : \Delta V \simeq 0$ (metall-ledning, god leder, $R_m \simeq 0$, $\boldsymbol{E} \simeq 0$)
$b \to c : \Delta V = -RI$ (motstand, dårlig leder, $R \gg R_m$, potensiell energi går tapt som varme pga kollisjoner, $\boldsymbol{E} \neq 0$)
$c \to d : \Delta V \simeq 0$ (som $a \to b$)
$d \to a : \Delta V = \mathcal{E} = RI$ (*mottar* ladningsbærere med lav potensiell energi, *leverer* ladningsbærere med høy potensiell energi.)

En *reell* kilde har alltid en (som regel liten) indre motstand R_i:



Når en reell spenningskilde kobles til en elektrisk krets, kommer den indre motstanden R_i som et tillegg til kretsens resistans R. Vi får da f.eks. effekttap både i kilden ($P_i = R_i I^2$) og i resten av kretsen ($P_R = RI^2$).

En *ideell* kilde har $R_i = 0$.

Kirchhoffs regler
[FGT 27.2, 27.3; YF 26.2; TM 25.5; AF 24.8; LHL 22.3]

Beregninger på elektriske kretser gjøres ved hjelp av Kirchhoffs regler.

Regel 1 (Knutepunktsregelen): På grunn av *ladningsbevarelse* er

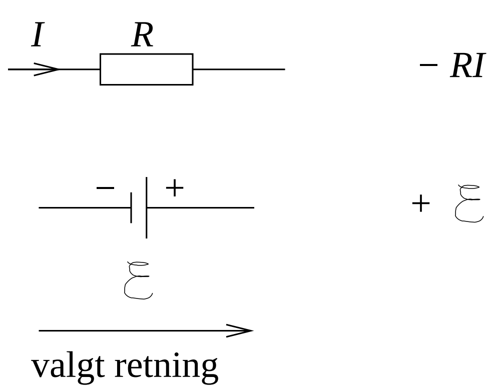
$$\sum_j I_j = 0$$

i alle knutepunkt i en krets.
I motsatt fall ville vi få opphopning av ladning i knutepunktet.
Fortegnskonvensjon: *Positiv I* når den går *ut av* knutepunktet.

Regel 2 (Sløyferegelen): På grunn av *energibevarelse* er

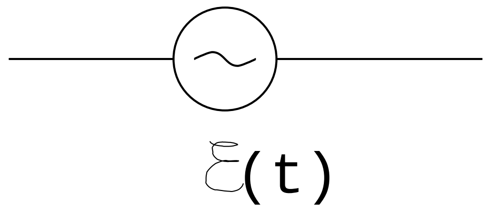
$$\sum(\text{spenningsendringer}) = 0$$

for alle lukkede sløyfer i en krets.
I motsatt fall ville vi ikke ha en entydig potensiell energi for ladningsbærere på et gitt sted i kretsen.
Fortegnskonvensjon: *Positivt* bidrag betyr *spenningsøkning*.



Kirchhoffs regler gir et tilstrekkelig antall uavhengige ligninger til å bestemme de ukjente størrelsene, f.eks. strømstyrkene I_j i kretsens ulike "grener".

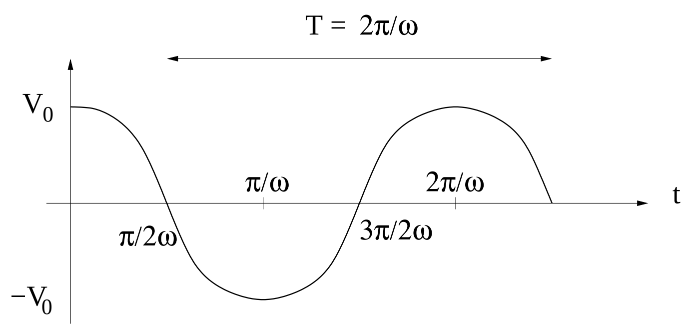
Vekselstrømkretser
[FGT 33.2; YF 31.1,31.2; TM 29.2,29.3; AF Note 27.2; LHL 27.3]



Harmonisk varierende spenningskilde:

$$\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$$

Perioden: $T = 2\pi/\omega$. Enhet: s. Angir hvor lang tid det tar mellom hver gang $\mathcal{E}(t)$ har, for eksempel, sin maksimalverdi V_0.
Frekvensen: $f = 1/T = \omega/2\pi$. Enhet: s^{-1} = Hz. Angir hvor mange svingninger $\mathcal{E}(t)$ utfører pr tidsenhet.
Vinkelfrekvensen: $\omega = 2\pi f$. Enhet: s^{-1} (evt. radianer pr sekund).
Amplituden: V_0. Enhet: V. Angir maksimalverdien til $\mathcal{E}(t)$.



Når en vekselspenningskilde kobles til en elektrisk krets (bestående av resistanser, kapasitanser osv), blir de resulterende strømstyrker harmonisk varierende vekselstrømmer. Kirchhoffs regler (strømregelen og spenningsregelen) må være oppfylt ved ethvert tidspunkt t (se kommentar nedenfor angående hvor raskt elektromagnetiske "forstyrrelser" forplanter seg), noe som setter oss i stand til å beregne resulterende strømstyrker i en gitt krets.

Tirsdag 20.03.07

Et par enkle eksempler med vekselspenningskilde koblet til elektriske kretser:

Eksempel 1: Vekselspenning $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos\omega t$ koblet til motstand R.
Ohms lov og Kirchhoffs spenningsregel ("K2") gir

$$\mathcal{E}(t) - RI(t) = 0$$

og dermed

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

Strømmen svinger *i fase* med den påtrykte spenningen, med amplitude

$$I_0 = V_0/R$$

Eksempel 2: Vekselspenning $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos\omega t$ koblet til kapasitans C.
Fra definisjonen av kapasitans, $C = Q/V$, følger det at spenningsfallet over kapasitansen er $V = Q/C$. K2 gir da

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

og dermed

$$Q(t) = V_0 C \cos\omega t$$

Strømmen er $I = dQ/dt$, dvs

$$I(t) = -V_0\omega C \sin\omega t = V_0\omega C\cos(\omega t + \pi/2)$$

Strømmen svinger 90° ute av fase i forhold til den påtrykte spenningen, med amplitude

$$I_0 = I_0(\omega) = V_0\omega C$$

Vi ser at strømamplituden nå blir avhengig av frekvensen til den påtrykte spenningen. Tar vi grensen $\omega \to 0$, har vi $I_0 \to 0$, som stemmer bra: Ingen likestrøm gjennom en (ideell) kondensator (se nedenfor)!

"Generalisert motstand", eller *impedans*: I henhold til Ohms lov er "ordinær motstand" definert som forholdet mellom spenning V og strøm I, $R = V/I$, og hvis V og I svinger med samme fase (dvs: $V(t) = V_0\cos\omega t$ og $I(t) = I_0\cos\omega t$), vil vi også kunne skrive $R = V_0/I_0$, dvs forholdet mellom *amplitudene* til spenning og strøm. Vi generaliserer denne definisjonen av motstand og lar den gjelde selv om spenning og strøm ikke svinger med samme fase: Med $V(t) = V_0\cos\omega t$ og $I(t) = I_0\cos(\omega t - \alpha)$ har kretsen en *impedans*

$$Z = V_0/I_0$$

og en *fasevinkel* α som angir faseforskjellen mellom spenningen $V(t)$ og strømmen $I(t)$.

Vi ser dermed at en motstand R er et kretselement med impedans

$$Z_R = R$$

og fasevinkel

$$\alpha_R = 0$$

En kapasitans C er et kretselement med impedans

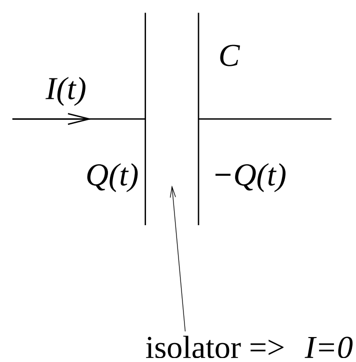
$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

og fasevinkel

$$\alpha_C = -\pi/2$$

RC-kretser
[FGT 27.5; YF 26.4; TM 25.6; AF Note 25.1; LHL 22.4; DJG Problem 7.2]

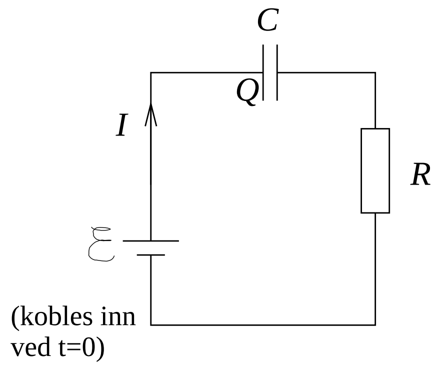
Rommet mellom de to lederne i en kondensator er fylt med en *isolator*, og *gjennom* en (ideell) isolator går det *null* elektrisk strøm.



Vi kan imidlertid ha en *tidsavhengig* strøm $I(t)$ inn og ut av kondensatorens ledere (*platene*, hvis det er snakk om en parallellplatekondensator).
Dermed får vi en tidsavhengig ladning $Q(t)$ på kondensatorplatene.

Kan vi bruke Kirchhoffs regler til å analysere kretser med tidsavhengige $I(t), V(t), Q(t)$?
Ja: For "langsomt" varierende strømstyrker, der langsomt er i forhold til hvor raskt en endring et sted i kretsen "merkes" i resten av kretsen. Siden elektromagnetiske signaler (bølger) forplanter seg med lyshastigheten c, er dette i praksis som regel ikke noe problem.

Eksempel 1: Opplading av kondensator i RC-krets.



(Like-)Spenningskilden $\mathcal{E}$ kobles inn ved tidspunktet $t = 0$. Da har vi null ladning på kondensatoren, $Q(0) = 0$.
Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow$

$$\mathcal{E} - V_C - V_R = 0$$

Spenningsfall over C:

$$V_C = Q/C$$

Spenningsfall over R:

$$V_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$$

Gir 1. ordens differensialligning for ladningen Q:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E}$$

som har løsning

$$Q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

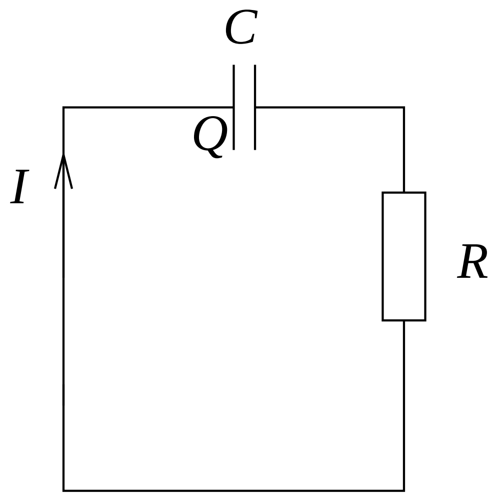
Her har vi brukt *initialbetingelsen* $Q(0) = 0$.
Strømstyrken blir

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

Tidskonstant for oppladningsprosessen: $\tau = RC$
Verdien av τ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren til sin maksimale ladning

$$Q(t \to \infty) = \mathcal{E}C$$

Eksempel 2: Utlading av kondensator i RC-krets.



Vi antar at kondensatoren i utgangspunktet er ladet opp med en spenningskilde $\mathcal{E}$ og at den er "full-ladet" slik at initialbetingelsen her er $Q(t=0) = \mathcal{E}C$.
Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow$

$$-V_R - V_C = 0$$

Gir igjen 1. ordens differensialligning for ladningen Q:

$$-R\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0$$

som har løsning

$$Q(t) = \mathcal{E}Ce^{-t/RC}$$

Her har vi brukt *initialbetingelsen* $Q(0) = \mathcal{E}C$.
Strømstyrken blir

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

Vi ser av figuren at vi her valgte "feil" retning på strømmen I: Positiv ladning vil måtte strømme fra den positivt ladete platen, og derfor gi positiv strøm i retning mot klokka. Dette er imidlertid ivaretatt, i og med at den beregnede strømmen kom ut med et negativt fortegn.

Merk at dersom vi hadde valgt motsatt retning på I i figuren, kunne vi ikke lenger ha skrevet $I = dQ/dt$, men derimot $I = -dQ/dt$, ettersom en positiv strøm da ville tilsvare en *reduksjon* i ladningen på kondensatoren. Med andre ord: dQ/dt vil da være negativ for positiv I, og vi må skrive $I = -dQ/dt$ for å få samme fortegn på begge sider av likhetstegnet.

Min *anbefaling* er å velge retning på strømmen I i forhold til ladningen Q på kondensatoren slik som det er gjort i figuren over. Da kan vi holde oss til sammenhengen $I = dQ/dt$, dvs positiv I tilsvarer en positiv endring i ladningen Q. Initialbetingelsen(e) for hvert enkelt problem sørger for at fortegnet på I blir riktig til slutt!

Neste uke:

Magnetisk vekselvirkning! Vi innleder (i ekstratimen på mandag) med å vise, eller i hvert fall sannsynliggjøre, at magnetfeltet og magnetiske krefter er en direkte konsekvens av elektrostatikken (dvs at ladninger i ro påvirker hverandre med Coulombkrefter) *og* Einsteins spesielle relativitetsteori. Vi kan med andre ord slå fast at *magnetisme er en relativistisk effekt*.

Deretter skal vi se på bevegelse av ladet partikkel i magnetfelt, og vi skal introdusere *Biot–Savarts lov*, som gir oppskriften på hvordan magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ beregnes med utgangspunkt i hva som måtte være "til stede" av elektriske *strømmer* I. Biot–Savarts lov er magnetostatikkens svar på Coulombs lov i elektrostatikken, som gir oppskriften på hvordan det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ beregnes med utgangspunkt i hva som måtte være "til stede" av elektriske *ladninger*. Og kjenner vi feltene $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i et område, kan vi også bestemme kraften på en ladning q med hastighet $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

som er den berømte *Lorentzkraften*.