Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007, uke19

Mandag 7. mai

Elektromagnetisk induksjon (fortsatt)

[FGT 30.1 - 30.6; YF 29.1 - 29.5; TM 28.2 - 28.3; AF 27.1 - 27.3; LHL 24.1; DJG 7.2]

Retningen på indusert ems $\mathcal{E}$ bestemmes med *Lenz' lov*: En eventuell generert strøm I, drevet av $\mathcal{E}$, skaper et magnetfelt $\boldsymbol{B}_I$ og dermed en magnetisk fluks $\phi_I = \int_S \boldsymbol{B}_I \cdot d\boldsymbol{A}$ som er *motsatt rettet fluksendringen* $d\phi_m$ som i utgangspunktet forårsaket $\mathcal{E}$.

En indusert ems $\mathcal{E}$ i ei lukket ledersløyfe impliserer et *indusert elektrisk felt* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Faradays lov (eller for å være presis: Faraday - Henrys lov) uttrykker dermed en sammenheng mellom *feltene* $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$:

$$\oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

der c er en lukket kurve som omslutter en flate S.

Ettersom integralet av et slik "Faraday-indusert" elektrisk felt rundt en lukket kurve *ikke* er lik null, er det (pr definisjon) heller *ikke* et konservativt felt. (Mens et *elektrostatisk* felt *er* konservativt.)

Gjensidig induktans

[FGT 32.1; YF 30.1; AF 27.12; LHL 25.4; DJG 7.2.3]

En strøm I_1 i ei strømsløyfe (1) resulterer i et magnetfelt $\boldsymbol{B}_1$ i området omkring. Dette feltet kan vi, i hvert fall i prinsipp, regne ut ved hjelp av Biot-Savarts lov:

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

(se f.eks. uke13.pdf). Dersom ei *anna* strømsløyfe (2) er plassert i dette området, vil magnetfeltet fra sløyfe (1) resultere i en magnetisk fluks gjennom sløyfe (2):

$$\phi_2 = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{A}_2 = \int_{S_2} \left\{ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{(1)} \frac{d\boldsymbol{l}_1 \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}_2$$

Uansett hva dette gufne integralet måtte være, kan vi uttrykke det på formen

$$\phi_2 = M_{21} I_1$$

forutsatt at I_1 er konstant i sløyfe (1), dvs den samme alle steder i sløyfa. (Og det må den jo være hvis det ikke skal hope seg opp med ladning noe sted...!)
Faktoren M_{21} er den *gjensidige induktansen* mellom de to sløyfene (1) og (2) og uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs omsluttet av) sløyfe (2) når det går en strøm i sløyfe (1):

$$M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1}$$

Omvendt må vi også få en magnetisk fluks gjennom sløyfe (1) hvis det går en strøm i sløyfe (2):

$$\phi_1 = \int_{S_1} \boldsymbol{B}_2 \cdot d\boldsymbol{A}_1 = \int_{S_1} \left\{ \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{d\boldsymbol{l}_2 \times \hat{r}}{r^2} \right\} \cdot d\boldsymbol{A}_1$$

dvs: Strømmen I_2 i sløyfe (2) skaper magnetfeltet $\boldsymbol{B}_2$, og dermed fluksen ϕ_1 gjennom sløyfe (1).
Og uansett hva *dette* integralet måtte bli, kan vi alltids skrive

$$\phi_1 = M_{12} I_2$$

der faktoren M_{12} uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs: gjennom arealet omsluttet av) sløyfe (1) når det går en strøm i sløyfe (2):

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

Både M_{21} og M_{12} er rett og slett geometriske faktorer som avhenger av form, størrelse og relativ plassering til de to strømsløyfene.
En kan vise at (se f.eks. Griffiths)

$$M_{21} = M_{12}$$

alltid gjelder. En kan dermed *velge* mellom to alternative framgangsmåter for å bestemme gjensidig induktans mellom to strømsløyfer: Enten beregne magnetisk fluks gjennom (1) pga strøm i (2), eller omvendt. Noen ganger er det ene mye enklere enn det andre!

Enhet for induktans: $[M] = [\phi_m/I] = [B \cdot A/I] = \mathrm{T{\cdot}m^2/A} \equiv \mathrm{H}$ (henry)

Gjensidig induksjon:
Tidsavhengig strøm $I_1(t)$ i sløyfe (1) gir tidsavhengig fluks $\phi_2(t)$ gjennom sløyfe (2), og dermed indusert ems i sløyfe (2):

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Tidsavhengig strøm $I_2(t)$ i sløyfe (2) gir tidsavhengig fluks $\phi_1(t)$ gjennom sløyfe (1), og dermed indusert ems i sløyfe (1):

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

Selvinduktans

[FGT 32.1; YF 30.2; TM 28.6; AF 27.8; LHL 25.1; DJG 7.2.3]

En strøm I i ei strømsløyfe resulterer i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$ i området omkring. Dette feltet kan vi, i hvert fall i prinsipp, regne ut ved hjelp av Biot-Savarts lov:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

(se f.eks. uke14.pdf). Magnetfeltet fra sløyfa resulterer i en magnetisk fluks gjennom sløyfa selv:

$$\phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} = \int_S \left\{\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2}\right\}\cdot d\boldsymbol{A}$$

Uansett hva dette gufne integralet måtte være, kan vi uttrykke det på formen

$$\phi = LI$$

forutsatt at I er konstant i sløyfa, dvs den samme alle steder i sløyfa. (Og det må den jo være hvis det ikke skal hope seg opp med ladning noe sted...!)

Faktoren L er *selvinduktansen* til sløyfa og uttrykker hvor mye magnetisk fluks vi får "gjennom" (dvs: gjennom arealet omsluttet av) sløyfa når det går en strøm i sløyfa:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

Enhet for selvinduktans: $[L] = [\phi_m/I] = [B\cdot A/I] = \mathrm{T\cdot m^2/A} \equiv \mathrm{H}$ (henry)

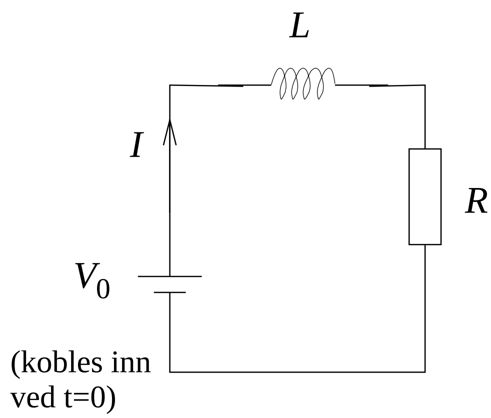
Selvinduksjon:

Tidsavhengig strøm $I(t)$ i sløyfe gir tidsavhengig fluks $\phi(t)$ gjennom sløyfa, og dermed indusert ems i sløyfa:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

RL-krets (med likespenningskilde V_0)
[FGT 32.4; YF 30.4; TM 28.8; AF Ex 27.5; LHL 25.2; DJG Ex 7.12]

Ser på seriekobling av *induktans* L (f.eks. en spole) og *resistans* R. Et batteri med likespenning V_0 kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$.



Total ems i kretsen er da

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

der det siste leddet er indusert "motspenning" over induktansen når vi prøver å *endre* strømstyrken gjennom den.
Ifølge Kirchhoffs spenningsregel (evt "sløyferegel") må denne totale emsen i sløyfa tilsvare spenningsfallet over motstanden R, med andre ord

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

eller

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Dette er nøyaktig samme type 1. ordens differensialligning for strømmen I som det vi hadde for kondensatorladningen Q da vi studerte opplading av kondensator i en RC-krets (se uke13.pdf, side 4). Løsningen blir

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

der vi har brukt initialbetingelsen $I(0) = 0$. (Før innkobling av batteriet er åpenbart $I = 0$. I tidspunktet $t = 0$ kan *ikke* strømmen i kretsen "hoppe" opp til en endelig verdi forskjellig fra null. Det måtte i såfall innebære at $dI/dt \to \infty$ i $t = 0$, hvilket igjen ville innebære en uendelig stor motspenning over induktansen. Det er rett og slett ikke fysisk mulig! Altså må I være kontinuerlig i $t = 0$, og vi kan sette $I(0) = 0$.)

Tidskonstant for endring av strømmen:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Verdien av τ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å øke strømmen i en slik RL-krets fra 0 til maksimal verdi V_0/R:

$$I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R}$$

RL-krets (med vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$)
[FGT 33.2; YF 31.2; TM 29.2, 29.3; AF Note 27.2; LHL 27.3]

Med en vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en induktans L har vi med bruk av Kirchhoffs spenningsregel:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t + V_L &= 0 \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI}{dt} \\ I(t) &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Vi kan skrive strømmen $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

(jfr uke12, og tilsvarende for kapasitans C og RC-kretser), og ser at strømamplituden er

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

mens fasevinkelen er

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Dvs, strøm I og påtrykt spenning $V = V_0 \cos \omega t$ er faseforskjøvet med en kvart periode i forhold til hverandre. I forbindelse med RC-kretser og vekselspenningskilde innførte vi størrelsen *impedans* Z, definert ved

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

Med andre ord, en slags generalisert motstand, jfr Ohms lov $R = V/I$. Vi ser da at impedansen til en induktans L blir

$$Z_L = \omega L$$

med fasevinkel

$$\alpha_L = \pi/2$$

Et eksempel til: Vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en induktans L.
Da må den totale strømmen I som "leveres" av spenningskilden fordele seg på en strøm I_R gjennom motstanden og en strøm I_L gjennom induktansen:

$$I = I_R + I_L$$

(Dvs: Kirchhoffs strømregel.) Videre må vi gjenfinne den påtrykte spenningen som et tilsvarende spenningsfall, både over motstanden og over induktansen. Med andre ord:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= R I_R \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

(Dvs: Kirchhoffs spenningsregel.) Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} \cos \omega t \\ I_L &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t$$

Vi kan skrive denne summen av to ledd på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

ved å bruke den trigonometriske relasjonen

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Dermed:

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

Sammenligning med uttrykket for $I(t) = I_R + I_L$ gir oss følgende to ligninger for de to ukjente størrelsene I_0 og α:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{R} &= I_0 \cos \alpha \\ \frac{V_0}{\omega L} &= I_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Dette ligningssettet har løsning

$$\tan \alpha = \frac{R}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

og

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)^{1/2}$$

Fra definisjonen av impedans, $Z = V_0/I_0$, ser vi at impedansen til en parallellkobling er

$$Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-1/2}$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er liten, dvs $\omega \ll R/L$, vil leddet $1/\omega^2 L^2$ dominere i forhold til $1/R^2$, slik at

$$Z \simeq \omega L$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er stor, dvs $\omega \gg R/L$, vil leddet $1/R^2$ dominere i forhold til $1/\omega^2 L^2$, slik at

$$Z \simeq R$$

Energi i magnetfelt
[FGT 32.2, 32.3; YF 30.3; TM 28.7; AF 26.8, 27.11; LHL 25.3; DJG 7.2.4]

La oss regne ut hvor mye energi som må tilføres en spole med induktans L når vi øker strømmen gjennom spoletråden fra $i = 0$ til en "sluttverdi" $i = I$.
Tilført energi ved å øke strømmen fra i til $i + di$:

$$dU_B = P\,dt = iv\,dt = iL\frac{di}{dt}dt = Li\,di$$

Her er $P = iv$ tilført effekt, og $v = Ldi/dt$ spenningen over spolen idet vi endrer strømmen fra i til $i + di$.
Dermed blir total energi tilført for å øke strømmen fra 0 til I lik

$$U_B = \int dU_B = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2$$

Denne energien kan vi nå assosiere med magnetfeltet B inne i spolen. Anta at spolen er tilnærmet uendelig lang, med N viklinger på hele lengden l. Tverrsnittet av spolen har areal A. Da er magnetfeltet inne i spolen

$$B = \mu_0 nI = \mu_0\frac{N}{l}I$$

(På utsiden av spolen er magnetfeltet null.) Total magnetisk fluks gjennom de N viklingene på spolen blir

$$\phi_m = NAB = NA\mu_0\frac{N}{l}I$$

som også kan skrives på formen

$$\phi_m = LI$$

der L er spolens (selv-)induktans. Med dette kan vi omforme uttrykket for energien U_B:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{NAB}{I}I^2 = \frac{1}{2}NAB\cdot\frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot Al$$

Her er Al lik volumet inne i spolen, så vi ser at vi har en *energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) assosiert med magnetfeltet B:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Fra før har vi funnet at vi har en energitetthet u_E assosiert med et elektrisk felt E:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dermed blir *total energitetthet i et elektromagnetisk felt*:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Kommentar: Dette uttrykket er “alltid riktig”, i den forstand at u representerer energien “lagret” i feltene E og B. I litteraturen “risikerer” du å støte på formelen

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

for total energitetthet dersom vi har polariserbare og/eller magnetiserbare medier tilstede. (I den siste overgangen her brukte vi at $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, med ε = mediets permittivitet og μ = mediets permeabilitet.)
Disse to uttrykkene for u er ikke identiske, og kan derfor ikke representere den samme energitettheten. Det siste uttrykket for u inkluderer da også et bidrag som ikke er direkte “lagret” i feltene, nemlig den “elastiske” energien knyttet til polarisering og magnetisering, dvs innrettingen av elektriske og magnetiske dipoler.
I den grad noe av dette blir aktuelt til eksamen, skal vi kun bry oss om *feltenergien* gitt ved

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$