Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007, uke 3

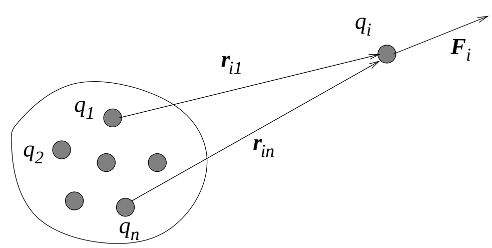
Mandag 15.01.07

Superposisjonsprinsippet

[FGT 21.4; YF 21.3; TM 21.3; AF 21.5; LHL 19.3; DJG 2.1.1]

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j q_i}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

= elektrostatisk kraft på ladning q_i fra ladninger q_j ($j = 1, 2, \ldots n$) i innbyrdes avstand r_{ij}.



Elektrisk felt

[FGT 22.1; YF 21.4; TM 21.4; AF 21.5; LHL 19.4; DJG 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

= kraft pr ladningsenhet

SI-enhet for elektrisk felt: $[E] = \mathrm{N/C}$

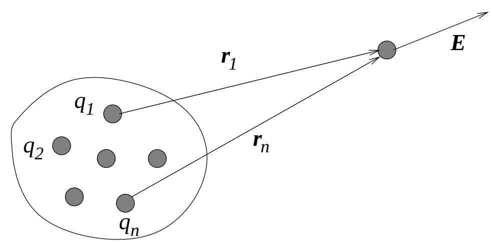
Tirsdag 16.01.07

Elektrisk felt fra punktladning
[FGT 22.1; YF 21.4; TM 21.4; AF 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Superposisjonsprinsipp for elektrisk felt:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_j^2}\hat{r}_j$$



Kontinuerlige ladningsfordelinger
[FGT 21.4, 22.3; YF 21.5; TM 22.1; AF eks. 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.4]

På en lengdeskala som er stor i forhold til avstanden mellom enkeltladninger ser man en tilnærmet *kontinuerlig* ladningsfordeling. (På samme måte som at makroskopiske objekter har en tilnærmet kontinuerlig massefordeling, selv om de egentlig består av "enkeltmasser" (atomer).)

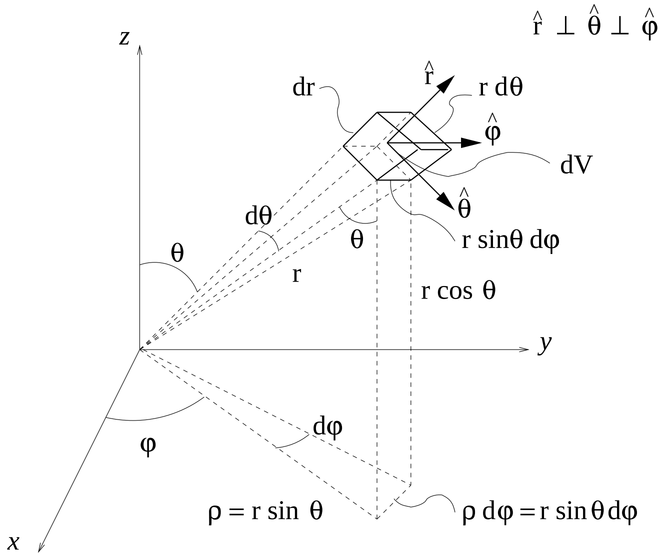
Sum over enkeltladninger erstattes da av *integral* over en ladningsfordeling:

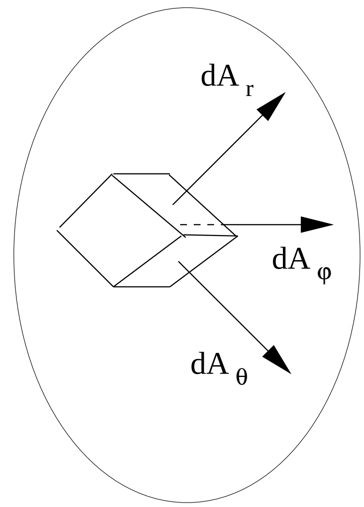
$$\sum_i \Delta q_i \stackrel{\Delta q_i \to 0}{\longrightarrow} \int dq$$

$3D$ (= 3 dimensjoner): romladning

$$\begin{aligned} dq &= \rho\, dV \\ \rho &= \rho(x,y,z) = \text{ ladning pr volumenhet } = \text{ romladningstetthet} \\ [\rho] &= [q/V] = \mathrm{C/m^3} \\ \text{Volumelement} : dV &= dx\, dy\, dz \ \ \text{(kartesiske koordinater)} \\ &= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr \ \ \text{(kulekoordinater)} \\ &= \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \ \ \text{(sylinderkoordinater)} \end{aligned}$$

Volumelement dV i kulekoordinater:





$$dV = (dr)\,(r\,d\theta)\,(r\sin\theta\,d\varphi)$$

$2D$: flateladning

$$\begin{aligned}
dq &= \sigma\, dA \\
\sigma &= \sigma(x,y) = \text{ ladning pr flateenhet } = \text{ flateladningstetthet} \\
[\sigma] &= [q/A] = \mathrm{C/m}^2 \\
\text{Flateelement} : dA &= dx\, dy \;\; \text{(kartesiske koordinater)} \\
&= r\, d\phi\, dr \;\; \text{(polarkoordinater)}
\end{aligned}$$

$1D$: linjeladning

$$\begin{aligned}
dq &= \lambda\, dl \\
\lambda &= \lambda(x) = \text{ ladning pr lengdeenhet } = \text{ linjeladningstetthet} \\
[\lambda] &= [q/L] = \mathrm{C/m} \\
\text{Linjeelement} : dl &= dx \;\; \text{(rett linje)} \\
&= R\, d\phi \;\; \text{(for sirkel med radius } R\text{)}
\end{aligned}$$

Elektrisk felt i avstand $\boldsymbol{r}$ fra infinitesimal ladning dq:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

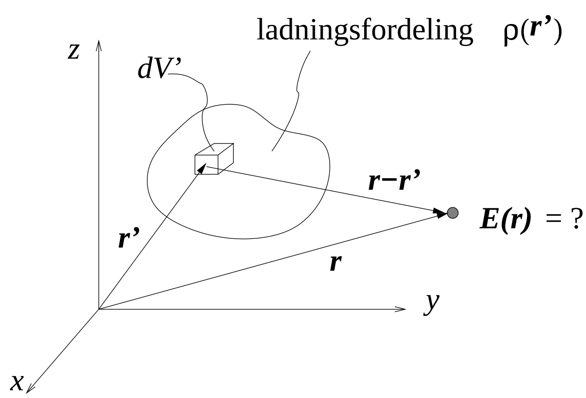
Elektrisk felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\hat{r}\,dq}{r^2} \overset{3D}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\hat{r}\rho\,dV}{r^2}$$

Mer presist: Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ i et punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ på grunn av en fordeling av elektrisk ladning beskrevet ved ladningstettheten $\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(x', y', z')$ er gitt ved

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

der $dV' = dx'\,dy'\,dz'$ (i kartesiske koordinater) er et volumelement i posisjon $\boldsymbol{r}'$.
Legg merke til at $\boldsymbol{r}$ ikke har samme betydning i de to siste ligningene. I den første angir $\boldsymbol{r}$ vektoren fra dq til punktet der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes. Dermed vil $\boldsymbol{r}$ være forskjellig for de ulike ladningselementene dq i systemet vi ser på. I den andre ligningen angir $\boldsymbol{r}$ posisjonen der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes, mens $\boldsymbol{r}'$ er posisjonsvariabelen til ladningstettheten ρ. Her hadde vi valget mellom å innføre en ny vektor $\boldsymbol{\mathcal{R}} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ og skrive $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}/\mathcal{R}^2$, eller (som vi valgte) å skrive om enhetsvektoren. På sin plass med en figur, kanskje:



Vi ser at den "aktuelle" enhetsvektoren skal peke fra volumelementet dV' i posisjon $\boldsymbol{r}'$ til posisjonen $\boldsymbol{r}$. Vi kan dermed skrive $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$ i uttrykket for $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.