Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007, uke 4

Mandag 22.01.07

Elektriske feltlinjer

[FGT 22.2; YF 21.6; TM 21.5; AF 21.6; LHL 19.6; DJG 2.2.1]

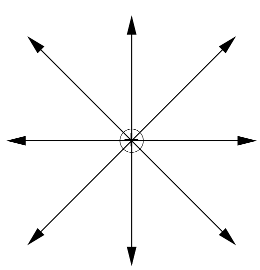
- gir en visuell framstilling av $\boldsymbol{E}$ i et område
- $\boldsymbol{E}$ ligger tangentielt til feltlinjene overalt
- styrken på $\boldsymbol{E}$ (dvs $|\boldsymbol{E}|$) er proporsjonal med tettheten av feltlinjer, dvs antall feltlinjer pr flateenhet

Konsekvenser av dette er bl.a. at

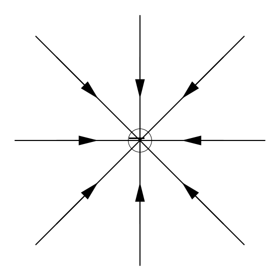
- feltlinjene går radielt *ut fra* positive (punkt-)ladninger og radielt *inn mot* negative ladninger
- like mange feltlinjer går ut fra ladning $+Q$ som inn mot $-Q$

Eksempler:

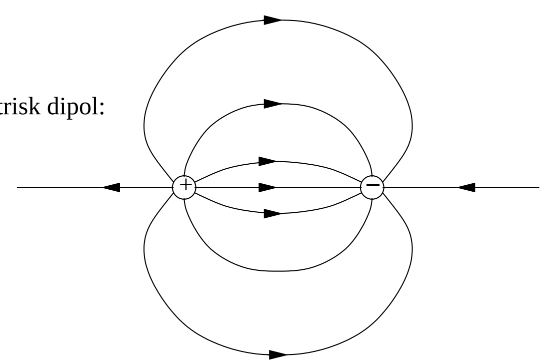
positiv punktladning:



negativ punktladning:



elektrisk dipol:



Elektrisk dipol og elektrisk dipolmoment
[FGT 22.1; YF 21.7; TM 21.4; AF 21.11; LHL 19.10; DJG 2.2.1, 3.4.2]

Dersom vi har to ladninger q og $-q$ i en viss innbyrdes avstand, har vi en elektrisk dipol. Avstandsvektoren $\boldsymbol{d}$ fra den negative ladningen $-q$ til den positive ladningen q beskriver hvordan de to er lokalisert i forhold til hverandre.
Dipolens elektriske *dipolmoment* $\boldsymbol{p}$ er da:

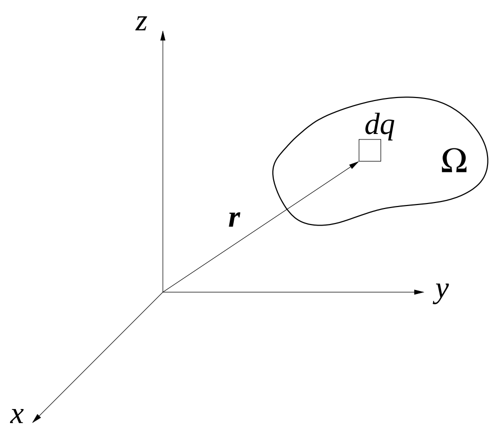
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

Dipolmomentet er altså en *vektor* som peker fra den negative mot den positive ladningen, med størrelse lik produktet av ladningen q og avstanden d.
Enhet for elektrisk dipolmoment: $[p] = [qd] = \text{Cm}$.

Mer generelt kan vi definere det elektriske dipolmomentet for en vilkårlig ladningsfordeling innenfor et romlig område Ω:

$$\boldsymbol{p} = \int_\Omega \boldsymbol{r}\, dq$$

Her kan Ω være et område i 1, 2 eller 3 dimensjoner.



I 1D ("linjeladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \lambda(x)\, dx \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} \end{aligned}$$

I 2D ("flateladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \sigma\, dA \\ &= \sigma(x,y)\, dx\, dy \quad \text{(kartesisk)} \\ & \quad \sigma(r,\phi)\, r\, dr\, d\phi \quad \text{(polarkoord)} \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} \quad \text{(kartesisk)} \\ & \quad r\,\hat{r} \quad \text{(polarkoord)} \end{aligned}$$

I 3D ("romladning"):

$$
\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
&= \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{(kartesisk)} \\
& \rho(r,\theta,\phi)\, r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad \text{(kulekoord)} \\
\boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \quad \text{(kartesisk)} \\
& r\,\hat{r} \quad \text{(kulekoord)}
\end{aligned}
$$

Det elektriske dipolmomentet $\boldsymbol{p}$ er bare entydig definert dersom systemet har null netto ladning, dvs

$$Q = \int_\Omega dq = 0$$

Dersom systemets nettoladning Q er forskjellig fra null, vil $\boldsymbol{p}$ avhenge av hvor vi plasserer origo (dvs $\boldsymbol{r} = 0$).

Eksempel: Stav med lengde $2L$, positiv ladning λ_0 pr lengdeenhet på den ene halvdelen ($0 < x < L$), negativ ladning $-\lambda_0$ pr lengdeenhet på den andre halvdelen ($-L < x < 0$). Bestem stavens elektriske dipolmoment $\boldsymbol{p}$.

Løsning:

$$\boldsymbol{p} = \int_{-L}^{L} x\hat{x}\lambda(x)dx = \hat{x}\lambda_0 \left(\int_{-L}^{0} (-x)dx + \int_0^L x dx \right) = \hat{x}\lambda_0 \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{2} \right) = \lambda_0 L^2 \hat{x}$$

Tirsdag 23.01.07

Elektrisk potensial
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.1; AF 21.9; LHL 19.9; DJG 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1]

Vi har en *konservativ* kraft $\boldsymbol{F}$ dersom arbeidet $\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ er uavhengig av veien mellom startposisjonen A og sluttposisjonen B.
Eksempler på konservative krefter: Gravitasjonskraften mellom to masser. Den elektrostatiske kraften mellom to ladninger.
Eksempel på ikke-konservativ kraft: Friksjon.

Mer generelt har vi et *konservativt vektorfelt* $\boldsymbol{G}$ dersom *veiintegralet* $\int_A^B \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$ er uavhengig av integrasjonsveien mellom A og B.

For et konservativt vektorfelt $\boldsymbol{G}$ gjelder:

$$\oint \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

der $\oint$ angir integral rundt *lukket kurve* i rommet.

For konservativ kraft $\boldsymbol{F}$ har vi en *potensiell energi* U slik at arbeidet utført av $\boldsymbol{F}$ på "systemet" (f.eks. ladningen som flyttes) ved en forflytning fra A til B tilsvarer *endringen* i systemets potensielle energi:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

[Fortegnssjekk: Forflytning av masse m oppover, dvs *mot* tyngdekraften $m\boldsymbol{g}$, gir økt potensiell energi og samtidig er $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} < 0$, altså er fortegnet OK!]

På samme måte som at det var hensiktsmessig å innføre elektrisk felt $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q =$ elektrisk kraft pr ladningsenhet, er det nå hensiktsmessig å innføre *elektrisk potensial* som *potensiell energi pr ladningsenhet*:

$$V = U/q$$

Enhet for elektrisk potensial: $[V] = [U/q] = \mathrm{J/C} \equiv \mathrm{V}$ (volt)

Sammenhengen mellom elektrisk potensial V og elektrisk felt $\boldsymbol{E}$
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.1; AF 21.10; LHL 19.9; DJG 2.3.1]

En ladning q som påvirkes av en elektrostatisk kraft $\boldsymbol{F}$ har en forskjell i potensiell energi

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

mellom punktene A og B. Da må den *elektriske potensialforskjellen* ΔV mellom punktene A og B være

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{q} = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Alternativ enhet for elektrisk felt: $[E] = [V/l] = \mathrm{V/m}$

Merk deg at mens elektrisk felt er en *vektorstørrelse*, så er elektrisk potensial en *skalar størrelse*.

Merk: Bare *forskjeller* i elektrisk potensial (og potensiell energi) har fysisk betydning. Kan fritt velge nullpunkt for potensialet. Vanlig valg: $V(r \to \infty) = 0$. Dermed, for punkt P:

$$V_P = -\int_\infty^P \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

(Vi kan ikke alltid velge $V(r \to \infty) = 0$. Det skal vi se eksempler på etterhvert.)

Elektrisk potensial fra punktladning (Coulombpotensialet)
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.2; AF 21.11; LHL 19.9; DJG 2.3.4]:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Elektrisk potensial (i et punkt P) fra flere punktladninger:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Her er r_i avstanden fra ladning nr i til punktet P. Det følger med andre ord at superposisjonsprinsippet også gjelder for potensialet V, ettersom det gjelder for feltet $\boldsymbol{E}$ (og krafta $\boldsymbol{F}$).

Dersom vi har en kontinuerlig ladningsfordeling, kan vi gå fram på nøyaktig samme vis som vi gjorde i forbindelse med elektrisk felt: Del opp området med ladning i små biter slik at bit nr i har en liten ladning Δq_i som kan betraktes som en punktladning. I grensen $\Delta q_i \to 0$ kan vi erstatte summen over i med et integral:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

med

$$dq = \begin{cases} \rho(x,y,z)\, dV & (3D) \\ \sigma(x,y)\, dA & (2D) \\ \lambda(x)\, dx & (1D) \end{cases}$$