Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007, uke 6

Mandag 05.02.07

Oppsummering til nå, og møte med Maxwell-ligning nr 1

Coulombs lov (empirisk lov for kraft mellom to ladninger q og q' i innbyrdes avstand r):

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Elektrisk felt fra punktladning q (følger av definisjonen "kraft pr ladningsenhet"):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Konservativ kraft:

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, dvs veien mellom punktene A og B. Dermed:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

(dvs når vi integrerer rundt en *lukket* kurve)

Med definisjonen av $\boldsymbol{E}$ følger det da at det elektrostatiske feltet også er konservativt, dvs:

$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, og dermed

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Dette er en av *Maxwells ligninger* (vel å merke, for statiske felt, dvs felt som ikke endrer seg med tiden).
Et konservativt vektorfelt kan alltid avledes fra et skalart *potensial*:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Potensialforskjellen mellom to punkter A og B kan beregnes dersom vi kjenner det elektriske feltet i området mellom A og B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Superposisjonsprinsippet gjelder for elektrisk kraft $\boldsymbol{F}$ (eksperimentelt resultat):

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

= kraft på ladning q_i fra ladninger q_j $(j = 1, 2, \ldots n)$
Da følger det at superposisjonsprinsippet også gjelder for elektrisk felt $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j$$

og for elektrisk potensial V,

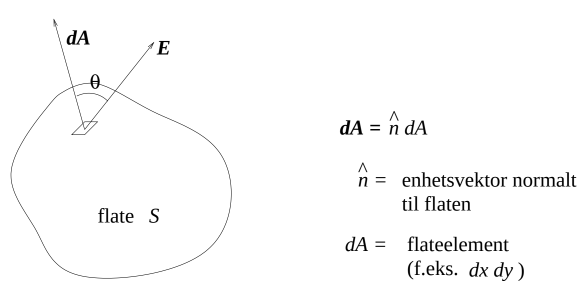
$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

Her er $\boldsymbol{E}_j$ og V_j bidrag til henholdsvis felt og potensial fra ladning nummer j.

Elektrisk fluks
[FGT 23.1; YF 22.1; TM 22.2; AF 25.3; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Noen ganger skriver vi ϕ_E for å presisere at det er snakk om *elektrisk* fluks. Vi har tidligere definert elektriske feltlinjer slik at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ skulle være proporsjonal med tettheten av feltlinjer, eller antall feltlinjer pr flateenhet. Av ovenstående definisjon av elektrisk fluks ϕ kan vi da slutte at ϕ representerer antall feltlinjer som krysser flaten S.
Følgende figur illustrerer hva dette går ut på:



Flaten S er en vilkårlig "tenkt" eller "valgt" flate i rommet. Det elektriske feltet "eksisterer" i området der flaten S er "plassert". ($\boldsymbol{E}$ kan være null eller forskjellig fra null.) Flaten S tenkes så delt inn i små flateelementer $d\boldsymbol{A} = \hat{n} dA$, med areal dA og orientering i rommet spesifisert ved *flatenormalen* $\hat{n}$. Fluksen $d\phi$ gjennom flaten dA er da lik $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$. Den totale fluksen gjennom hele flaten S får vi ved å integrere opp bidragene $d\phi$, altså ligningen over.

Merk at fluksen er en *skalar* størrelse. Den kan imidlertid være positiv eller negativ, avhengig av om vinkelen mellom vektorene $\boldsymbol{E}$ og $d\boldsymbol{A}$ er mindre eller større enn 90 grader.

En *lukket flate* S er en flate som omslutter et veldefinert volum V, f.eks. et kuleskall, et peanøttskall e.l. Den elektriske fluksen gjennom en lukket flate skriver vi slik (jfr. notasjonen for veiintegral rundt lukket kurve):

$$\phi_c = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Indeksen c står for "closed". Den er forsåvidt unødvendig så lenge vi skriver ned integralet. Ringen på integrasjonssymbolet er tilstrekkelig for å understreke at det er snakk om en lukket flate.
Med en lukket flate kan vi gjøre unna "fortegnsproblemet" en gang for alle: Vi velger *positiv* retning på $d\boldsymbol{A}$ *ut av* flaten.
Dermed kan vi konkludere med at

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{fluks ut gjennom flaten} \\ \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{fluks inn gjennom flaten} \end{aligned}$$

Dessuten:

$$\begin{aligned} \phi_c > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{netto fluks ut gjennom flaten} \\ \phi_c < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{netto fluks inn gjennom flaten} \end{aligned}$$

For en *ikke lukket* flate S har vi ingen tilsvarende mulighet for å velge positiv retning på $d\boldsymbol{A}$. Flaten har to sider, og ingen av disse kan sies å være mer "inne" eller "ute" i forhold til den andre. I enkelte tilfeller velger vi imidlertid en positiv retning på (den lukkede!) kurven (linjen) som går rundt kanten av S. Da definerer vi positiv retning på $d\boldsymbol{A}$ ved hjelp av *høyrehåndsregelen*: La høyrehåndas fire øvrige fingre peke i positiv retning for flatens omsluttende kurve. Da peker tommelen i positiv retning for $d\boldsymbol{A}$.

Tirsdag 06.02.07

Gauss' lov
[FGT 23.2; YF 22.3; TM 22.2, 22.6; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

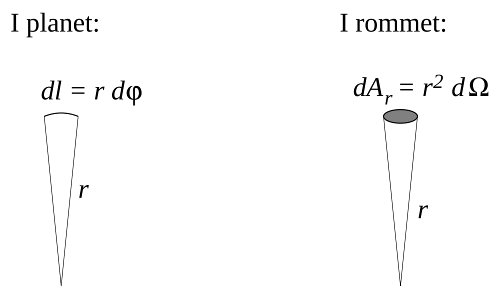
Gauss' lov (på såkalt integralform; senere i kurset, hvis vi får tid, skal vi se at vi også har en versjon av Gauss' lov på såkalt differensialform):

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

Her er integralet på venstre side av ligningen et *flateintegral* over en *lukket* flate S, mens q_{in} er total (netto) ladning innenfor den lukkede flaten ("gaussflaten").

Gauss' lov er en av *Maxwells ligninger*. (Vi konsentrerer oss fremdeles om *elektrostatikk* en god stund framover, men faktisk er det slik at Gauss' lov også gjelder selv om $\boldsymbol{E}$ skulle finne på å variere med tiden.)
Innholdet i ligningen kan formuleres slik: Netto antall feltlinjer ut av et volum, dvs ut gjennom den lukkede flaten som avgrenser dette volumet, er bestemt av, og direkte proporsjonal med netto ladning inne i volumet, dvs innenfor den lukkede flaten.
Gauss' lov følger direkte av Coulombs lov, og representerer således ingen ny fysikk.

I forbindelse med beviset for Gauss' lov fikk vi bruk for det vi kalte en *romvinkel* Ω. På samme måte som en liten sektor i et plan utspenner en *vinkel* $d\phi$ vil en liten kjegle i rommet utspenne en *romvinkel* $d\Omega$. Videre: På samme måte som at buelengden dl i avstand r fra "sentrum" da blir $dl = r\ d\phi$ blir arealet dA_r av flaten som står normalt på $\boldsymbol{r}$ og som avgrenses av den lille kjeglen da lik $dA_r = r^2\ d\Omega$.



Lar vi sektoren i planet utspenne en hel omdreining, tilsvarer det en vinkel

$$\oint d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Tilsvarende: Lar vi kjeglen i rommet utspenne en hel kuleflate, tilsvarer det en romvinkel

$$\oint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta = 4\pi$$

(Her har vi brukt kulekoordinater, der $dA_r = r^2 \sin\theta\ \ d\theta\ \ d\phi$ (se øving 4!), slik at $d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$.)

Når er Gauss' lov spesielt nyttig?
[FGT 23.3; YF 22.4; TM 22.3; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.3]

Gauss' lov kan brukes til å bestemme det elektriske feltet fra en ladningsfordeling der vi har en eller annen form for *symmetri*. Eksempler: Kulesymmetri, plansymmetri, sylindersymmetri.

Sylindersymmetri: Se øving 6, uendelig lang stav med uniform ladning λ pr lengdeenhet.

Kulesymmetri: I forelesningen så vi på en jevnt ladet kuleflate og fant at det elektriske feltet *inni* kula da var lik null, mens det *utenfor* kula var som om hele kuleflatens ladning Q var samlet i kulas sentrum, dvs

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

Når vi har en kulesymmetrisk ladningsfordeling, innser vi at det elektriske feltet må bli radielt rettet, og dessuten at den elektriske feltstyrken $|\boldsymbol{E}|$ bare avhenger av avstanden r fra ladningsfordelingens sentrum (og ikke vinklene θ og ϕ, dvs hvor vi er på en gitt kuleflate). Vi innser da at det er lurt å velge nettopp en kuleflate med radius r som gaussflate for å bestemme $E(r)$, fordi "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ da er parallell med $\boldsymbol{E}$ på hele gaussflaten. Integralet i Gauss' lov blir da lett å løse:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Med kulesymmetrisk ladningsfordeling, dvs at ladningen pr volumenhet ρ bare er en funksjon av r' (og ikke θ' og ϕ'), blir det også lett å bestemme hvor mye ladning vi har innenfor gaussflaten:

$$\begin{aligned} q_{\text{in}}(r) &= \int_{r'<r} \rho(r') dV' \\ &= \int_{r'=0}^{r} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \rho(r')(r')^2 \, dr' \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi' \\ &= 4\pi \int_{r'=0}^{r} \rho(r') \, (r')^2 \, dr' \end{aligned}$$

Bare ladningstettheten $\rho(r')$ ikke er en altfor "slem" funksjon, klarer vi som regel å løse det siste integralet over r'. Vi ser f.eks. at med konstant ρ, vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^3$, og hvis $\rho(r') \sim r'$ (lineært voksende), vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^4$. I førstnevnte tilfelle vil dermed $E(r) \sim r$, i sistnevnte tilfelle vil $E(r) \sim r^2$.
Merk at hvis r er så stor at hele ladningen Q ligger innenfor gaussflaten (dvs: $\rho(r') = 0$ for $r' > r$), vil vi alltid ha $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, dvs som om hele ladningen var samlet i sentrum. Dette resultatet er spesielt for kulesymmetri.

Plansymmetri: Et annet viktig eksempel er et jevnt ladet, uendelig stort plan. Vi viste da at dersom planet har ladning σ pr flateenhet, blir det elektriske feltet

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

dvs uavhengig av avstanden til planet. I dette tilfellet innser vi for det første at $\boldsymbol{E}$ overalt må stå vinkelrett på det ladede planet, og dessuten at feltstyrken $|\boldsymbol{E}|$ i hvert fall ikke kan avhenge av annet enn avstanden til planet. Med det som utgangspunkt innser vi at en lur gaussflate må bli en fyrstikkeske eller sylinder som gjennomskjæres på midten av det ladede planet. Da har vi at flateelementvektoren $d\boldsymbol{A}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$ på gaussflatens to endeflater som er parallelle med det ladede planet, mens $d\boldsymbol{A}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{E}$ på resten av gaussflaten. Integralet i Gauss' lov reduserer seg dermed til $2EA$, der A er arealet av gaussflatens nevnte endeflater. Ladningen innenfor en slik gaussflate blir σA, ettersom et areal A av den ladede flaten nå ligger innenfor gaussflaten. Dermed finner vi at E er konstant, og altså heller ikke avhengig av avstanden til det ladede planet!

Det var deretter ikke vanskelig å bestemme det elektriske feltet fra to parallelle plan med motsatt ladning, $\pm\sigma$ (begge planene fremdeles uendelig store). Bruk av superposisjonsprinsippet gav

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

i området mellom planene, og

$$E = 0$$

i området på utsiden av planene. Mellom planene er feltet rettet fra det positive til det negative planet.

Dette siste eksemplet er meget relevant: Det representerer en såkalt *parallellplatekondensator*, der platenes areal er stort i forhold til avstanden mellom dem. Vi skal komme tilbake til dette eksemplet mange ganger.