

NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN
FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
TFY4155 ELEKTROMAGNETISME
Tirsdag 27. mai 2008 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

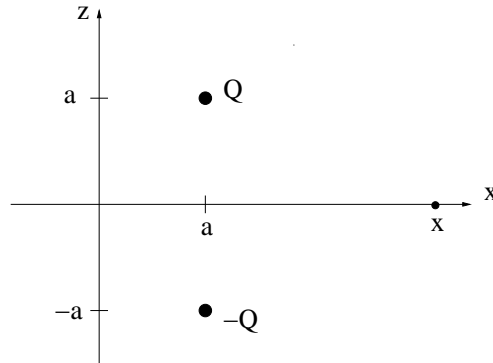
Side 2 - 5: Oppgave 1 - 4.
Vedlegg 1 - 3: Formelsamling.

Prøven består av i alt 10 deloppgaver (1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c). Hver av disse vil normalt bli tillagt like stor vekt under bedømmelsen. Vektorstørrelser er angitt med **fete** typer. Enhetsvektorer er angitt med hatt over symbolet. Dersom intet annet er oppgitt, kan det antas at det omgivende mediet er luft (vakuum), med permittivitet $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m og permeabilitet $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. I oppgaver hvor tallverdier er oppgitt for alle nødvendige størrelser, skal tallsvar bestemmes. I oppgaver der det ikke er bedt uttrykkelig om utledninger eller bevis, kan formler og resultater som er utledet i læreboka, forelesningene eller regneøvingene benyttes uten utledning, dersom du husker dem. Dette gjelder f.eks. oppgave 3.

Sensuren er klar senest 17. juni.

OPPGAVE 1

a) To punktladninger Q og $-Q$ er plassert i xz -planet, i posisjonene (a, a) og $(a, -a)$ som vist i figuren:



Hva er systemets elektriske dipolmoment \mathbf{p} ? (Angi både størrelse og retning.)

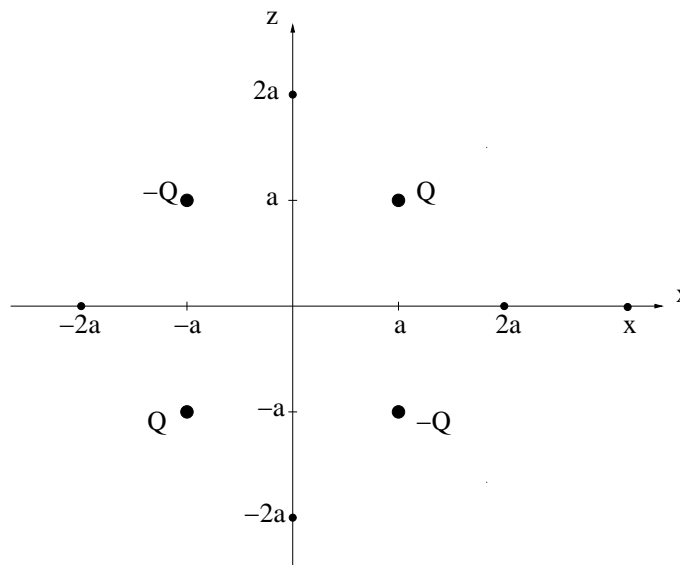
Tegn en figur som illustrerer bidragene \mathbf{E}_+ og \mathbf{E}_- fra henholdsvis Q og $-Q$ til det totale elektriske feltet $\mathbf{E}(x)$ i et punkt på (den positive) x -aksen. I hvilken retning peker $\mathbf{E}(x)$?

Den elektriske feltstyrken $E(x) = |\mathbf{E}(x)|$ kan skrives på formen

$$E(x) = \beta (x^2 - 2ax + 2a^2)^{-3/2}$$

Vis dette ved å regne ut $E(x)$, og fastlegg på den måten β .

b) Systemet i oppgave a) modifiseres ved at to nye punktladninger Q og $-Q$ plasseres i posisjonene $(-a, -a)$ og $(-a, a)$:



Tegn en figur som viser retningen på det elektriske feltet i de fire punktene

$$(x, z) = (2a, 0), (-2a, 0), (0, 2a), (0, -2a),$$

dvs på positiv og negativ x - og z -akse. Hva blir \mathbf{E} på y -aksen?

Bestem feltstyrken $E(x) = |\mathbf{E}(x)|$ på positiv x -akse. [Tips: Benytt resultatet i oppgave a).]

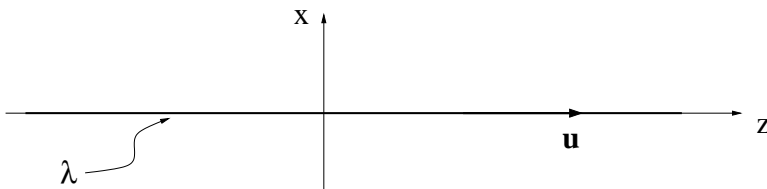
c) For systemet i oppgave a), finn et tilnærmet uttrykk for den elektriske feltstyrken i et punkt langt ute på den positive x -aksen, dvs $x \gg a$. Gjør det samme for systemet i oppgave b).

[Kommentar: Med "et tilnærmet uttrykk" menes "til ledende orden i den lille dimensjonsløse størrelsen a/x ", dvs første ledd i en polynomutvikling i a/x . Merk at denne deloppgaven, i hvert fall til en viss grad, kan gjøres uavhengig av om størrelsen β i oppgave a) har blitt fastlagt eller ei.]

Oppgitt: $(1 + \alpha)^n \simeq 1 + n\alpha$ når $\alpha \ll 1$.

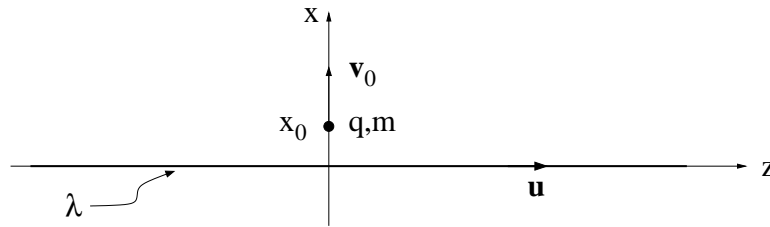
OPPGAVE 2

a) En tilnærmet uendelig lang, tynn stav er plassert på z -aksen. Staven har (positiv) ladning λ pr lengdeenhet, og den beveger seg med hastighet $\mathbf{u} = u \hat{z}$:



Bruk Gauss' lov og Amperes lov til å bestemme henholdsvis elektrisk felt \mathbf{E} og magnetfelt \mathbf{B} rundt staven. Tegn feltlinjer for \mathbf{E} og \mathbf{B} i xy -planet.

b) En partikkel med ladning q og masse m starter, ved tidspunktet $t = 0$, med starthastighet $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{x}$ i posisjonen $(x, y, z) = (x_0, 0, 0)$ (se figur neste side). Partikkelen påvirkes dermed av en elektrisk kraft \mathbf{F}_e og en magnetisk kraft \mathbf{F}_m .



I hvilken retning virker kreftene \mathbf{F}_e og \mathbf{F}_m ved $t = 0$?

Hva blir forholdet $|\mathbf{F}_m|/|\mathbf{F}_e|$ ved $t = 0$?

[Tips: Hvis du ikke helt greide å bestemme \mathbf{E} og \mathbf{B} i oppgave a), kan du her anta at $E(x) = \alpha/x^n$ og $B(x) = \beta/x^n$, med samme heltallige eksponent n i E og B .]

Newtons 2. lov, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, representerer to (koblede differensial-) ligninger for partikkelens bevegelse, som forblir i xz -planet. Finn disse to ligningene. (NB: Du skal *ikke løse* bevegelsesligningene.)

OPPGAVE 3

a) En motstand er formet som en sylinder med lengde $l = 2.00$ cm og sirkulært tverrsnitt med areal $A = 1.00$ mm². Materialet som benyttes har konduktivitet $\sigma = 21.7$ Ω^{-1} m⁻¹. Bestem motstandens resistans R .

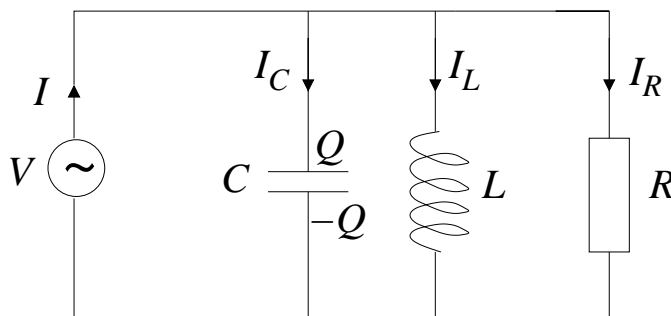
Oppgitt: $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$

En parallellplatekondensator har plater med areal $A = 5.00$ cm² og innbyrdes avstand $d = 0.10$ mm. Volumet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet $\epsilon_r = 8.00$. Bestem kondensatorens kapasitans C .

b) En spole med lengde $l = 100$ cm og sirkulært tverrsnitt med areal $A = 0.50$ cm² har $N = 632$ viklinger av spoletråden. Volumet inne i spolen er fylt med et ferromagnetisk materiale med relativ permeabilitet $\mu_r = 1200$. Bestem spolens induktans L . (Tips: Spolen er tilstrekkelig lang til at magnetfeltet med god tilnærming kan antas å være uniformt inne i spolen, mens $B = 0$ utenfor spolen.)

OPPGAVE 4

En vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega t$ er koblet til en parallellkobling av en motstand R , en kapasitans C og en induktans L .



a) Bestem de ulike bidragene $I_R(t)$, $I_C(t) = dQ/dt$ og $I_L(t)$ til den totale strømmen $I(t)$. Du kan anta at alle strømmer svinger med samme vinkelfrekvens ω som den påtrykte spenningen.

b) Skriv total strøm på formen $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ og bestem på den måten amplituden I_0 og fasevinkelen α . Hva blir kretsens impedans $Z(\omega) = V_0/I_0$? Impedansen kan skrives på formen

$$Z(\omega) = R/\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2 (1 - \omega_0^2/\omega^2)^2}$$

Hva er ω_0 og ω_1 uttrykt ved R , C og L ?

(Tips: Hvis du benytter de tre komponentene fra oppgave 3, blir tallverdiene til de "karakteristiske" vinkelfrekvensene ω_0 og ω_1 begge ca $3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.)

[NBNBNB: Riktig tallverdi for ω_0 er ca $3 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$. Dette ble det gjort oppmerksom på under eksamen.]

c) Anta at $\omega_1 = \omega_0$ i tallverdi, innfør den dimensjonsløse størrelsen $x = \omega/\omega_0$, og skisser den dimensjonsløse funksjonen $Z(x)/R$ for x mellom 0 og 10. Diskuter kort og kvalitativt verdien av impedansen Z i grensen $\omega \rightarrow 0$, i lys av at induktansen i virkeligheten består av en lang og tynn metalltråd av f.eks. kobber.

Oppgitt: $\cos(a - b) = \cos b \cos a + \sin b \sin a$

Formelsamling

$\int d\mathbf{A}$ angir flateintegral og $\int d\mathbf{l}$ angir linjeintegral. \oint angir integral over lukket flate eller rundt lukket kurve. **Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent.

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Elektrisk fluks:

$$\phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Gauss' lov for elektrisk felt og elektrisk forskyvning:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

- Elektrisk forskyvning:

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

- Elektrisk dipolmoment; generell definisjon:

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{r} dq$$

- Elektrisk dipolmoment; for punktladninger $\pm q$ i avstand \mathbf{d} :

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Elektrisk polarisering = elektrisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}$$

- Kapasitans:

$$C = \frac{q}{V}$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

- Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

- Ampères lov for \mathbf{B} og \mathbf{H} :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Magnetiserende felt \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

- Magnetisk dipolmoment; generell definisjon:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r$$

- Magnetisk dipolmoment; for plan strømsløyfe:

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} = I A \hat{n}$$

- Magnetisering = magnetisk dipolmoment pr volumenhet:

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V}$$

Vedlegg 3 av 3

- Magnetisk kraft på strømførende leder; generelt:

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faraday–Henrys lov:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

- Ampère–Maxwells lov:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi_m}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M_{12} = \frac{\phi_1}{I_2}, \quad M_{21} = \frac{\phi_2}{I_1}, \quad M_{12} = M_{21} = M$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$