

Løsningsforslag, Midtsemesterprøve torsdag 6. mars 2008 kl 1000 – 1200.

Fasit side 12.

### Oppgavene med kort løsningskisse

---

1) Hvilken påstand er feil?

C En kondensators kapasitans øker lineært med ladningen på kondensatoren.

En kondensators kapasitans avhenger ikke av ladningen på kondensatoren.

(59% svarte riktig.)

---

2) Hvilken påstand er riktig?

D Elektrisk polarisering kan måles i enheten  $C/m^2$ .

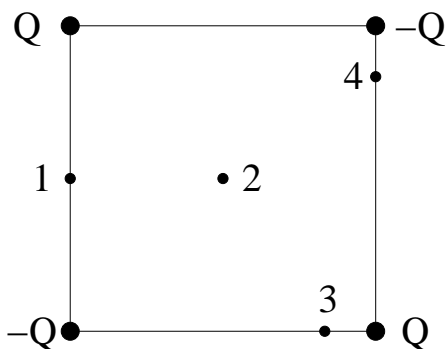
Polarisering er dipolmoment pr volumenhet, og dipolmoment har enhet som ladning multiplisert med lengde.

(85% svarte riktig.)

---

3) Fire punktladninger, to positive ( $Q$ ) og to negative ( $-Q$ ), er plassert i hvert sitt hjørne av et kvadrat. Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene 1, 2, 3 og 4. (Punkt 1 er midt på venstre "sidekant", punkt 2 er midt i kvadratet.)

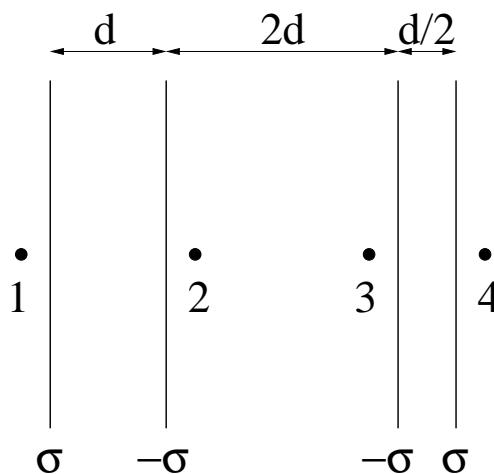
C  $V_3 > V_1 = V_2 > V_4$



Planet gjennom 1 og 2 samt planet gjennom 2 som står vinkelrett på det første har begge null potensial, fordi alle posisjoner i disse to planene har parvis like store avstander til en positiv og en negativ ladning. Videre har vi høyt potensial i nærheten av en positiv ladning og lavt potensial i nærheten av en negativ ladning. Dermed må vi ha  $V_4 < 0$  og  $V_3 > 0$ , og som sagt  $V_1 = V_2 = 0$ . (72% svarte riktig.)

4) Fire store parallelle plan har innbyrdes avstand  $d$ ,  $2d$  og  $d/2$  som vist i figuren. Planene har ladning pr flateenhet  $\sigma$ ,  $-\sigma$ ,  $-\sigma$  og  $\sigma$  (fra venstre mot høyre, og  $\sigma > 0$ ). Ranger det elektriske potensialet i de fire punktene merket med 1, 2, 3 og 4.

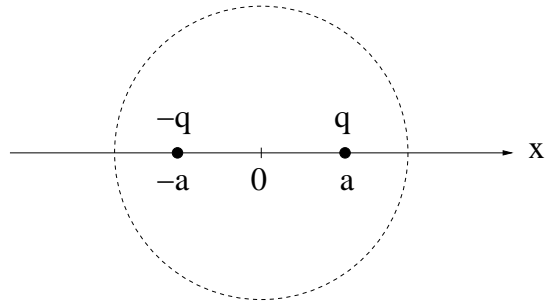
B  $V_1 > V_4 > V_2 = V_3$



Mellom de to planene lengst til venstre har vi elektrisk feltstyrke  $\sigma/\epsilon_0$ , med retning mot høyre, mellom de to planene lengst til høyre ditto feltstyrke, men med retning mot venstre. Forøvrig er  $E = 0$ . Dermed avtar potensialet med  $\sigma d/\epsilon_0$  fra 1 til 2, forblir konstant fra 2 til 3, og øker med  $\sigma d/2\epsilon_0$  fra 3 til 4. Følgelig alternativ B. (29% svarte riktig.)

5) To punktladninger  $\pm q$  er plassert i  $x = \pm a$  ( $y = z = 0$ ). Hva blir netto elektrisk fluks gjennom en kuleflate med radius  $3a/2$  og sentrum i origo?

B 0

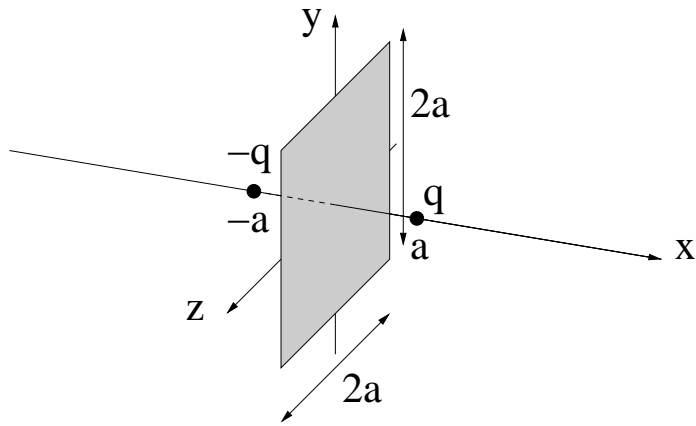


Gauss' lov: Null netto ladning innenfor kuleskallet gir null netto elektrisk fluks gjennom kuleskallet. (94% svarte riktig.)

---

6) To punktladninger  $\pm q$  er plassert i  $x = \pm a$  ( $y = z = 0$ ). Hva blir netto elektrisk fluks gjennom den delen av  $yz$ -planet som avgrenses av  $-a \leq y \leq a$ ,  $-a \leq z \leq a$  (og  $x = 0$ )?

D  $q/3\epsilon_0$



Det skraverte planet utgjør 1/6 av overflaten av en terning med sidekanter  $2a$ , der vi kan tenke oss både  $q$  og  $-q$  i sentrum av terningen. Symmetribetraktninger gir dermed at en fluks  $q/6\epsilon_0$  fra hver av de to ladningene passerer gjennom det skraverte planet, i begge tilfeller fra høyre mot venstre. Alt i alt en fluks  $q/3\epsilon_0$  gjennom planet. (33% svarte riktig.)

---

7) Det elektriske feltet i et område er

$$\mathbf{E}(x, z) = \hat{x} E_0 \cos kx - \hat{z} E_0 \sin kz,$$

der  $k$  og  $E_0$  er konstanter. Hva er da potensialforskjellen mellom origo og punktet  $(\pi/k, \pi/k, \pi/k)$ , dvs

$$\Delta V = V\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}\right) - V(0, 0, 0)?$$

D  $\Delta V = 2E_0/k$

Forflytningen i  $x$ -retning gir en potensialendring

$$\Delta V_1 = - \int_0^{\pi/k} E_0 \cos kx dx = 0$$

Forflytningen i  $y$ -retning gir null potensialendring ettersom det elektriske feltet ikke har noen  $y$ -komponent. Endelig gir forflytningen i  $z$ -retning en potensialendring

$$\Delta V_3 = - \int_0^{\pi/k} (-E_0 \sin kz) dz = - \Big|_0^{\pi/k} \frac{E_0}{k} \cos kz = \frac{2E_0}{k}$$

som da også blir den totale potensialendringen  $\Delta V$ .  
(54% svarte riktig.)

---

8) Potensialet i et område er

$$V(y) = k V_0 y,$$

der  $k$  og  $V_0$  er konstanter. Hvor mye potensiell elektrisk energi  $U_E$  befinner seg da i volumet avgrenset av

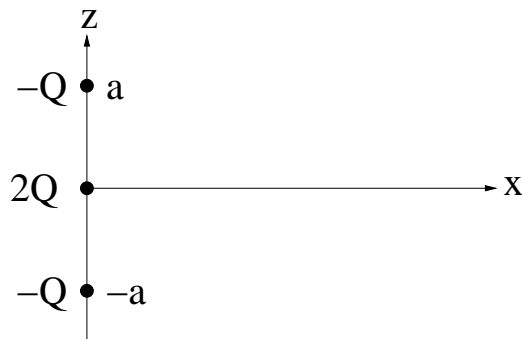
$$0 \leq x \leq \pi/k \quad , \quad 0 \leq y \leq \pi/k \quad , \quad 0 \leq z \leq \pi/k \quad ?$$

A  $U_E = \varepsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 2k$

Det oppgitte potensialet betyr at det elektriske feltet er  $-k V_0 \hat{y}$ , slik at energien pr volumenhet er  $u_E = \varepsilon_0 E^2 / 2 = \varepsilon_0 k^2 V_0^2 / 2$ . Det oppgitte området har volum  $(\pi/k)^3$ , slik at den elektriske energien i dette området blir  $U_E = \varepsilon_0 V_0^2 \pi^3 / 2k$ .  
(71% svarte riktig.)

---

9) Figuren viser et system med 3 punktladninger lokalisert på  $z$ -aksen:  $-Q$  i  $z = -a$  og i  $z = a$ , og  $2Q$  i  $z = 0$ . Hva er dette systemets elektriske dipolmoment  $\mathbf{p}$ ?



A  $\mathbf{p} = 0$

Dette kan vi se for oss som to dipoler med motsatt retning, følgelig totalt dipolmoment null.  
(84% svarte riktig.)

---

10) Hva er det elektriske feltet  $\mathbf{E}(x)$  på den positive  $x$ -aksen i oppgave 9?

D  $\mathbf{E}(x) = \frac{Q\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right]$

Vi kan uten videre stryke alternativene A og B ettersom vi der har samme fortegn på bidragene

inne i parentesen. Videre må vi multiplisere bidragene fra de to negative ladningene med en faktor  $x/\sqrt{x^2 + a^2}$  for å finne  $x$ -komponenten. Dermed ser vi at alternativ D er eneste mulighet. (46% svarte riktig.)

---

11) Langt ute på den positive  $x$ -aksen (dvs  $x \gg a$ ) kan potensialet  $V(x)$  i oppgave 9 tilnærmet skrives som

$$C \quad V(x) \simeq \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

Her har vi minst et par muligheter: Vi kan summere bidragene fra de tre ladningene og finne ”ledende ordens” bidrag for store verdier av  $x$ . Alternativt kan vi innse at potensialet fra dette systemet må avta *raskere* enn potensialet fra en dipol. Da potensialet fra en dipol avtar som  $1/x^2$  for store avstander  $x$ , må vi her velge alternativ C. (22% svarte riktig.)

---

12) Systemet i oppgave 9 har potensiell energi

$$D \quad U = -\frac{7Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

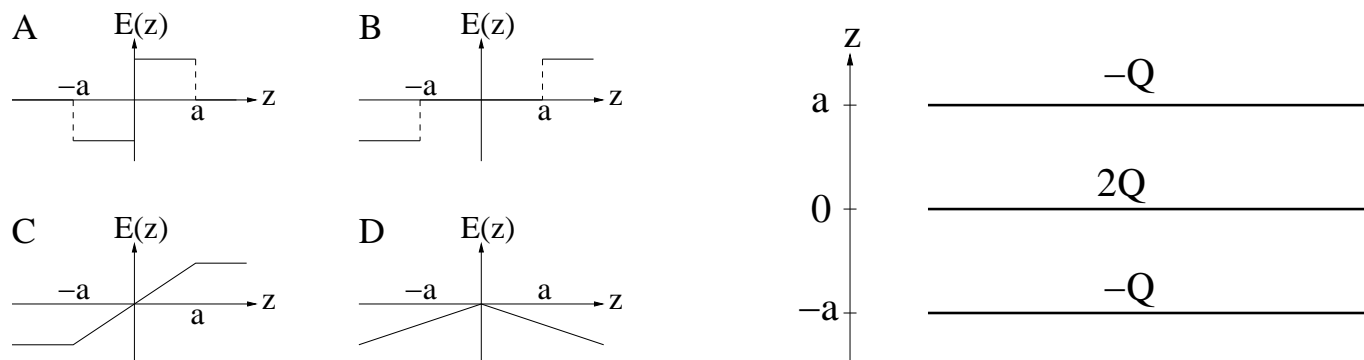
Med tre punktladninger har vi 3 ladningspar som bidrar til total energi:

$$U = -2 \cdot 2Q^2 4\pi\epsilon_0 a + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} = -\frac{7Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

(75% svarte riktig.)

---

13) Tre tynne uniformt ladete store parallelle metallplater med areal  $A$  og ladning  $-Q, 2Q, -Q$  er lokalisert i  $z = -a, 0, a$ , som vist i figuren til høyre. Hvilken graf viser korrekt resulterende elektrisk felt  $E(z)$  (slik at  $\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{z}$ )?



Legger vi sammen elektriske feltbidrag fra de 3 planene, finner vi ut at det totale feltet er  $Q/\epsilon_0 A$  mellom  $z = -a$  og  $z = a$ , med retning oppover for  $z > 0$  og retning nedover for  $z < 0$ . Følgelig er graf A den riktige.

(84% svarte riktig.)

---

14) Hva er total potensiell energi for de tre ladete platene i oppgave 13?

$$D \quad U = \frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}$$

Vi har uniform energitetthet lik  $\epsilon_0 E^2 / 2 = Q^2 / 2\epsilon_0 A^2$  i hele volumet mellom nederste og øverste plate. Total energi blir dermed

$$U = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2} \cdot 2a \cdot A = \frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}$$

(72% svarte riktig.)

---

15) For systemet i oppgave 13 settes potensialet lik null på den nederste platen, dvs  $V(-a) = 0$ . Hva er da potensialene  $V(0)$  og  $V(a)$  på henholdsvis midtre og øverste plate?

$$A \quad V(0) = \frac{Qa}{\epsilon_0 A}, \quad V(a) = 0$$

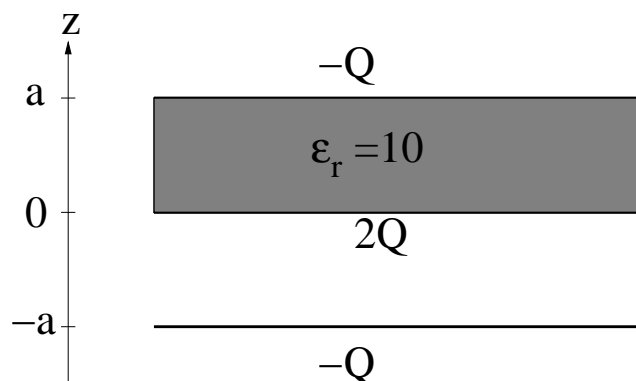
Potensialet øker med  $Qa/\epsilon_0 A$  fra nederste til midtre plate, for så å avta med samme beløp fra midtre til øverste plate. Følgelig alternativ A.

(69% svarte riktig.)

---

16) I systemet i oppgave 13 fylles volumet mellom midtre og øverste plate med en dielektrisk skive med relativ permittivitet  $\epsilon_r = 10$ . Hva blir nå potensialforskjellen  $\Delta V = V(a) - V(-a)$  mellom øverste og nederste plate?

$$B \quad \Delta V = \frac{9Qa}{10\epsilon_0 A}$$

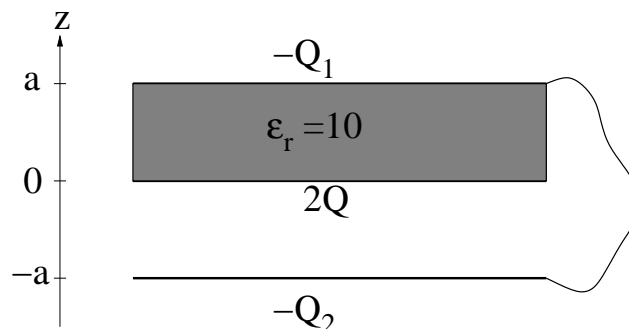


Den elektriske feltstyrken er nå redusert med en faktor 10 i volumet mellom midtre og øverste plate, sammenlignet med før vi satte inn den dielektriske skiva. Følgelig avtar potensialet bare med  $Qa/10\epsilon_0 A$  når vi går fra midtre til øverste plate. Dermed blir potensialforskjellen mellom øverste og nederste plate  $9Qa/10\epsilon_0 A$ .

(72% svarte riktig.)

17) Øverste og nederste plate i oppgave 16 forbindes med en tynn elektrisk leder slik at de to platene oppnår samme elektriske potensial. Bestem resulterende ladning  $-Q_1$  og  $-Q_2$  på henholdsvis øverste og nederste plate. (Du kan anta at den tynne lederen som forbinder de to platene hele tiden er elektrisk nøytral.)

A  $-Q_1 = -20Q/11, -Q_2 = -2Q/11$



Samme potensial på øverste og nederste plate innebærer at vi må ha samme elektriske feltstyrke i øvre halvdel (der vi har dielektrikum) som i nedre halvdel (der vi har luft/vakuum), men med motsatt retning. Vi legger sammen bidragene fra de tre platene, og finner:

$$\frac{2Q}{2A\epsilon_0 \cdot 10} + \frac{Q_1}{2A\epsilon_0 \cdot 10} - \frac{Q_2}{2A\epsilon_0 \cdot 10} = \frac{2Q}{2A\epsilon_0} + \frac{Q_2}{2A\epsilon_0} - \frac{Q_1}{2A\epsilon_0}$$

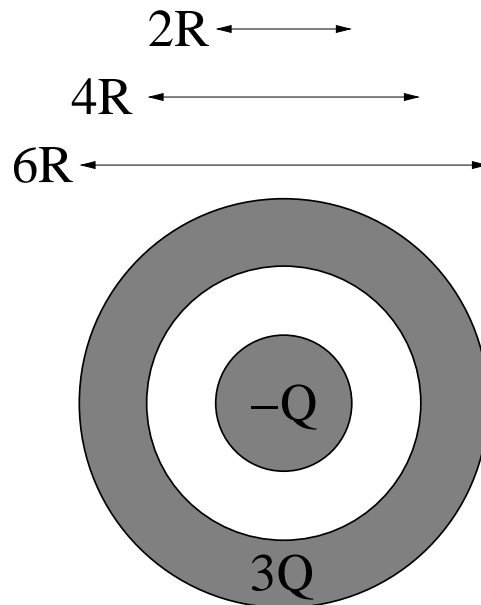
Dessuten må vi selvsagt ha

$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

Løser vi disse to ligningene med hensyn på de to ukjente ladningene, finner vi  $Q_1 = 20Q/11$  og  $Q_2 = 2Q/11$ .

(52% svarte riktig.)

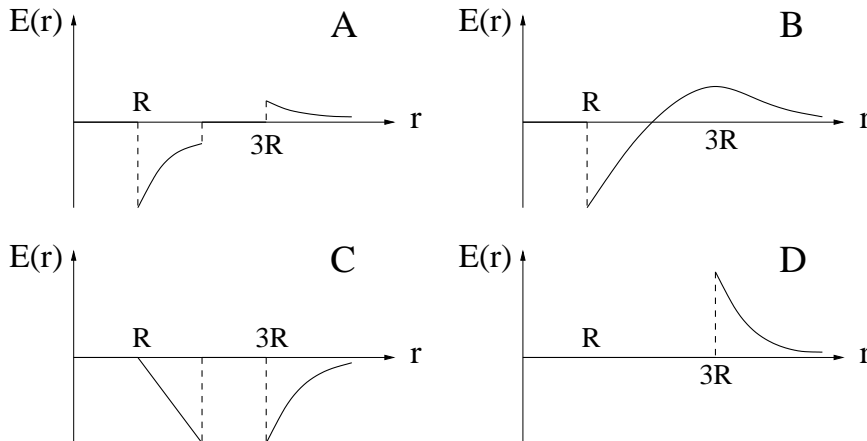
18) Ei metallkule med radius  $R$  og (negativ) ladning  $-Q$  er omgitt av et vakuumsjikt med tykkelse  $R$  fulgt av et metallisk kuleskall med tykkelse  $R$  og ladning  $3Q$ . Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?



C  $2Q$

Gauss' lov med gaussflate inne i det metalliske kuleskallet gir at en ladning  $Q$  må ligge på indre overflate. Dermed blir det igjen  $2Q$  på ytre overflate.  
(98% svarte riktig.)

19) Hvilken graf viser korrekt  $E(r)$  (slik at  $\mathbf{E}(r) = E(r) \hat{r}$ ) for systemet i oppgave 18?



Her skal det vel litt fantasi til for å foreslå noe *annet* enn alternativ A.  
(89% svarte riktig.)

20) Hva er potensialforskjellen mellom kuleskallet og et punkt som ligger i avstand  $6R$  fra sentrum av systemet i oppgave 18, dvs  $\Delta V = V(r = 3R) - V(r = 6R)$ ?

C  $\Delta V = Q/12\pi\epsilon_0 R$



Utenfor kuleskallet er  $E(r) = 2Q/4\epsilon_0 r^2$ , slik at

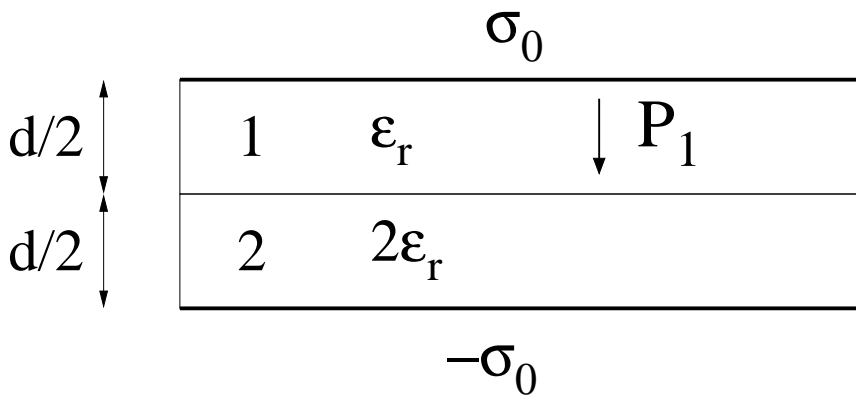
$$\Delta V = - \int_{6R}^{3R} \frac{2Q}{4\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{12\pi\epsilon_0 R}$$

(67% svarte riktig.)

---

21) To store metalliske plan har areal  $A$  og ladning pr flateenhet henholdsvis  $\sigma_0$  (øverste plate) og  $-\sigma_0$  (nederste plate). Plateavstanden er  $d$ . Volumet mellom metallplatene er fylt med to dielektriske skiver. Medium 1, i øverste halvdel, har relativ permittivitet  $\epsilon_r$  mens medium 2, i nederste halvdel, har relativ permittivitet  $2\epsilon_r$ . Hvor stor blir polariseringen  $P_1$  i medium 1?

A 
$$P_1 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0$$



$$P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = (1 - 1/\epsilon_r) \sigma_0$$

der vi har brukt at den elektriske forskyvningen  $D = \sigma_0$  (den samme i hele volumet mellom metallplatene).

(69% svarte riktig.)

---

22) Hva blir kapasitansen  $C$  til parallellplatekondensatoren i oppgave 21? (Tips: Dette kan betraktes som en seriekobling av to kapasitanser.)

B 
$$C = 4\epsilon_r \epsilon_0 A / 3d$$

Kapasitansen til øverste halvdel:

$$C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 A / (d/2)$$

Kapasitansen til nederste halvdel:

$$C_2 = 2\epsilon_r \epsilon_0 A / (d/2)$$

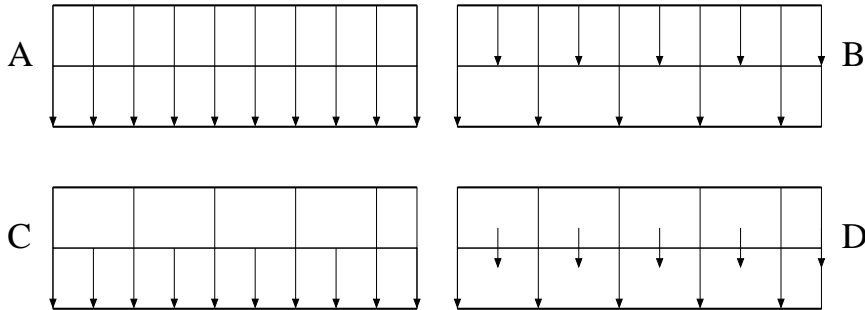
Total kapasitans til to seriekoblede kapasitanser finner vi deretter ved å ta den inverse av summen av inverse enkeltkapasitanser:

$$C = (1/C_1 + 1/C_2)^{-1} = 4\epsilon_r\epsilon_0 A/3d$$

(80% svarte riktig.)

---

23) Hvilken av figurene nedenfor illustrerer feltlinjer for det elektriske feltet  $\mathbf{E}$  i parallellplatekondensatoren i oppgave 21?

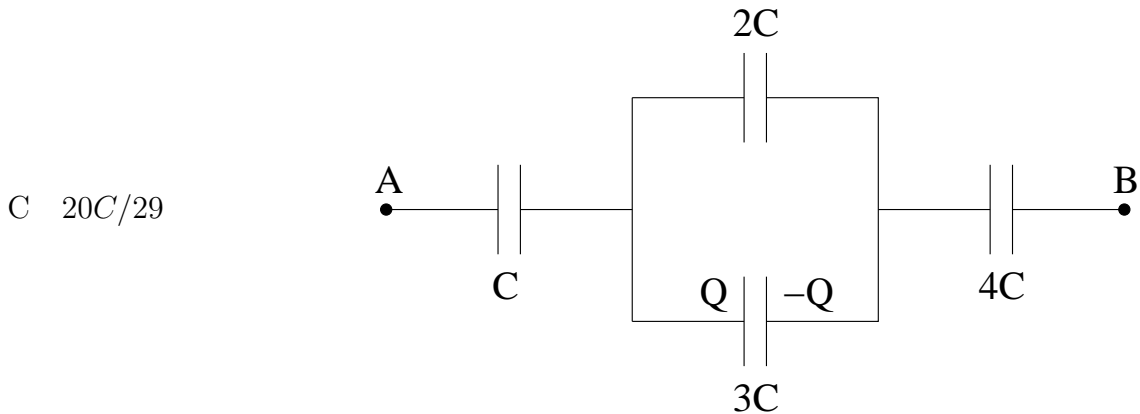


Svakere elektrisk felt der vi har størst relativ permittivitet. Altså alternativ B.

(79% svarte riktig.)

---

24) Figuren viser en sammenkobling av 4 kapasitanser,  $C$ ,  $2C$ ,  $3C$  og  $4C$ . Hva blir total kapasitans for hele sammenkoblingen?



De to parallellkoblede i midten har til sammen kapasitans  $5C$ . Dermed:

$$C_{\text{total}} = (1/C + 1/5C + 1/4C)^{-1} = 20C/29$$

(86% svarte riktig.)

---

25) Anta at det mellom endepunktene A og B i oppgave 24 er en potensialforskjell  $V_0 = V_A - V_B$ . Hvor mye ladning  $(\pm)Q$  befinner seg da på kapasitansen  $3C$ ?

$$D \quad Q = 12V_0C/29$$

La oss kalle ladningen på  $C$  og  $4C$  for  $Q_0$ . Med  $Q$  på  $3C$  blir det da ladning  $Q_0 - Q$  på  $2C$ . Samme potensialforskjell over  $2C$  og  $3C$  gir da ligningen

$$\frac{Q}{3C} = \frac{Q_0 - Q}{2C}$$

dvs

$$Q = \frac{3}{5}Q_0$$

og

$$Q_0 = \frac{5}{3}Q$$

Total potensialforskjell  $V_0$  fra A til B gir

$$V_0 = \frac{5Q}{3C} + \frac{Q}{3C} + \frac{5Q}{12C} = \frac{29Q}{12C}$$

og dermed

$$Q = 12V_0C/29$$

(61% svarte riktig.)

---

## FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme/Elektromagnetisme

Midtsemesterprøve torsdag 6. mars 2008 kl 1000 – 1200.

### Fasit

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	15	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	16	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	17	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	19	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	21	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	22	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	23	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	24	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	25	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
13	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					