

Løsningsforslag til øving 1

Aller først et par kommentarer angående notasjon: Mens vektorer på tavla blir angitt med en pil over symbolet, brukes typisk **fete** symboler i trykte notater, som her. Det betyr at \mathbf{F} angir vektoren (f.eks. en kraft), og da både dens størrelse F og retning. Enhetsvektorer, dvs (dimensjonsløse) vektorer med lengde 1, angis med en $\hat{}$ over symbolet. Da har vi f.eks. sammenhengene $\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\hat{F} = F\hat{F}$. Videre vil vi skrive de ulike *komponentene* av en vektor med en senket indeks, f.eks. F_x for x -komponenten av \mathbf{F} .

Oppgave 1

a) Riktig svar er B:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{7.1^2 + 1.3^2} = 7.2$$

b) Riktig svar er C:

Vektoren \mathbf{A} har negativ x -komponent og negativ y -komponent, hvilket betyr at den ligger i 3. kvadrant. La oss først bestemme vinkelen θ mellom negativ x -akse og \mathbf{A} . Vi har da

$$\tan \theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{2.3}{3.7}$$

som gir $\theta = 32$ grader. Den søkte vinkelen, når vi går mot urviseren fra positiv x -akse til \mathbf{A} , må da bli lik $180 + \theta = 212$ grader.

c) Riktig svar er A:

La oss sette $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Da er

$$C_x = B_x - A_x = -10.7$$

$$C_y = B_y - A_y = 3.9$$

slik at absoluttverdien til \mathbf{C} blir

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{10.7^2 + 3.9^2} = 11.4$$

d) Riktig svar er D:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y = 6.1 \cdot (-9.8) + (-5.8) \cdot 4.6 = -86.5$$

e) Riktig svar er D:

$$\int_0^1 (x + x^2) dx = \Big|_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

f) Riktig svar er C:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{r}$$

g) Riktig svar er B:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = (0, 0, 1)$$

Oppgave 2

a) Med 0.20 g pr cm og lengde 100 cm blir trådens masse

$$m = \mu \cdot L = 0.20 \frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot 100 \text{ cm} = 20 \text{ g}$$

Trådens volum er

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{20 \text{ g}}{8.92 \text{ g/cm}^3} = 2.24 \text{ cm}^3$$

slik at tverrsnittet er

$$t = \frac{V}{L} = \frac{2.24 \text{ cm}^3}{100 \text{ cm}} \simeq 0.022 \text{ cm}^2$$

Følgelig er diameteren

$$d = \sqrt{\frac{4t}{\pi}} \simeq 0.17 \text{ cm} = 1.7 \text{ mm}$$

b) Vi ser av $t(x)$ at tråden er tynnere ved $x = 0$ og $x = L$, dvs på endene. Her er tykkelsen $t_0(1 - 1/4) = 3t_0/4$, dvs 2.25 mm^2 . Den er tykkere på midten, ved $x = L/2$. Her er tykkelsen t_0 , dvs 3 mm^2 . Med variabelt tverrsnitt $t(x)$ må vi summere opp små massebiter $dm = \rho \cdot t(x) \cdot dx$, for å bestemme total masse, dvs vi må *integrere*:

$$m = \int dm = \int \rho \cdot t(x) \cdot dx$$

Her har jeg foreløpig ikke spesifisert noen integrasjonsgrenser, men det er klart at jeg skal integrere "over hele trådens utstrekning". Det siste integralet i ligningen over skal gjøres med hensyn på posisjonen x , og dermed gir grensene seg selv, nemlig $x = 0$ som nedre grense og $x = L$ som øvre grense:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L \rho \cdot t_0 \left(1 - \left(\frac{x - L/2}{L} \right)^2 \right) \cdot dx \\ &= \rho t_0 \Big|_0^L \left(x - \frac{1}{3L^2} (x - L/2)^3 \right) \\ &= \rho t_0 \left(L - \frac{1}{3L^2} (L^3/8 + L^3/8) \right) \\ &= \frac{11}{12} \rho t_0 L \end{aligned}$$

Med tallverdier:

$$m = \frac{11}{12} \cdot 8.92 \cdot 0.03 \cdot 100 \simeq 24.5$$

som blir i enheten gram, ettersom vi har bare har brukt enhetene g og cm underveis.

c) Midlere (dvs gjennomsnittlige) masse pr kobberatom blir

$$\langle m \rangle = \frac{63 \cdot 69.17 + 65 \cdot 30.83}{100} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1.06 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

De 29 elektronene i hvert kobberatom har tilsammen masse

$$29 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 2.6 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

så disse kan trygt neglisjeres.

d) Antall kobberatomer i tråden blir

$$N = \frac{0.020}{1.06 \cdot 10^{-25}} \simeq 1.89 \cdot 10^{23}$$

Dette tilsvarer

$$\frac{1.89 \cdot 10^{23}}{6.02 \cdot 10^{23}} \text{ mol} \simeq 0.31 \text{ mol}$$

e) Protonene i tråden har tilsammen ladning

$$Q_p = N \cdot 29 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \simeq 877 \text{ kC}$$

Elektronene i tråden har like stor ladning, men med motsatt fortegn,

$$Q_e = -Q_p$$

Trådens totale ladning er null.

Oppgave 3

a) Uniform ladning σ_0 pr flateenhet og areal πR^2 gir total ladning

$$Q = \sigma_0 \pi R^2$$

Her kunne en kanskje tenke seg at ei slik skive vil ha to sider, og dermed en overflate med totalt areal $2\pi R^2$. Men i så fall ville det ha vært opplyst om at skiva hadde en viss tykkelse, og at ladningen befant seg på overflaten av skiva. Men for all del: *Spør* hvis du er i tvil om hvordan en oppgave skal tolkes!

b) Med ladningstetthet som avtar lineært med avstanden r fra skivas sentrum:

$$\begin{aligned} Q &= \int dq = \int_0^R \sigma_0 (1 - r/R) \cdot 2\pi r \cdot dr \\ &= 2\pi\sigma_0 \int_0^R (r^2/2 - r^3/3R) \\ &= 2\pi\sigma_0 (R^2/2 - R^2/3) \\ &= \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2 \end{aligned}$$

Oppgave 4

Vi kan med god tilnærming regne oksygenmolekylene som punktformede legemer ettersom avstanden mellom dem (300 \AA) er mye større enn hvert enkelt molekyls utstrekning (av størrelsesorden $1 - 2 \text{ \AA}$). Massen til et oksygenmolekyl er $m(\text{O}_2) = (32 \text{ g/mol}) / (6.02 \cdot 10^{23} \text{ molekyl/mol}) = 5.32 \cdot 10^{-23} \text{ g/molekyl} = 5.32 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Gravitasjonskraften mellom de to oksygenmolekylene blir da

$$F_g = G \frac{m(\text{O}_2)^2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{(5.32 \cdot 10^{-26})^2 \text{ kg}^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m}^2} = 2.09 \cdot 10^{-46} \text{ N}$$

Gravitasjonskrefter er alltid *tiltrekkende*.

Med ett ekstra elektron har hvert ion O_2^- en ladning $q = -e$. Den elektriske kraften F_e mellom de to ionene blir dermed

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2} = 2.56 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

Med ladningene i enheten C og avstanden i enheten m, samt SI-verdien $9 \cdot 10^9$ for faktoren $1/4\pi\epsilon_0$ er vi sikret at kraften kommer ut i enheten N.

Den elektriske kraften mellom to ladninger med *samme fortegn* er *frastøtende*.

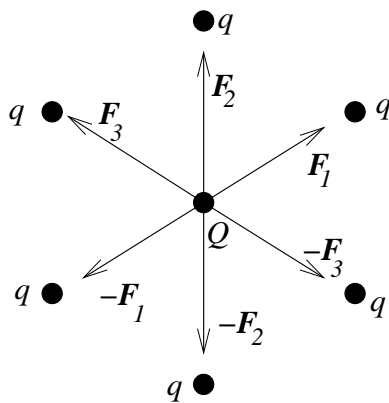
Forholdet mellom de to kreftene er

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2.56 \cdot 10^{-13}}{2.09 \cdot 10^{-46}} \sim 10^{33}$$

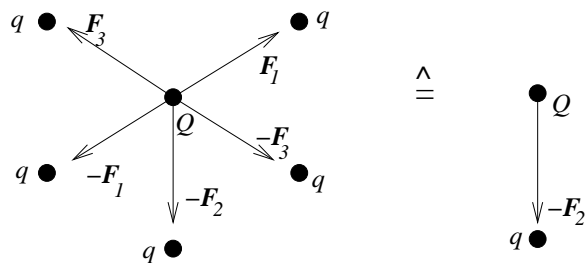
Dette betyr at gravitasjonskreftene mellom (“ikke altfor store”) ladete legemer som regel kan neglisjeres i forhold til den elektriske kraften. Dette forholdet er ikke avhengig av avstanden mellom de to ionene ettersom både F_e og F_g avhenger av innbyrdes avstand som $1/r^2$.

Oppgave 5

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, i det kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den “øverste”:



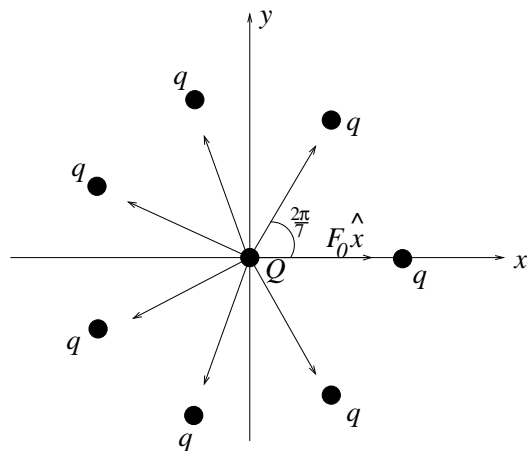
Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså $-\mathbf{F}_2$.

Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \mathbf{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \mathbf{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirker Q med kraften \mathbf{F}_2 . Da er

$$\sum_{(5)} \mathbf{F}_i = \sum_{(6)} \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_2 = 0 - \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2$$

c) Også med et odde antall q -ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7^\circ$ i papirplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.

Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x -aksen:



Nettokraften på Q blir da:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \hat{x} + F_y \hat{y} \\ &= F_0 (1 + 2 \cos 2\pi/7 + 2 \cos 4\pi/7 + 2 \cos 6\pi/7) \hat{x} + \\ &\quad F_0 (0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7)) \hat{y} \\ &= F_0 (1 + 1.247 - 0.445 - 1.802) \hat{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.