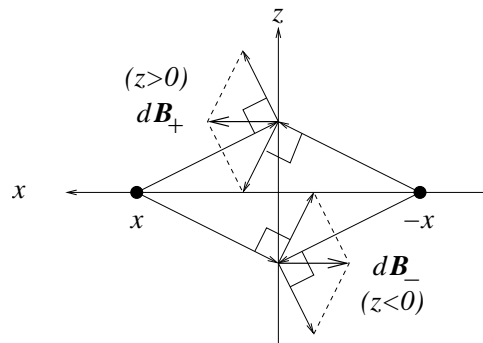


Løsningsforslag til øving 13

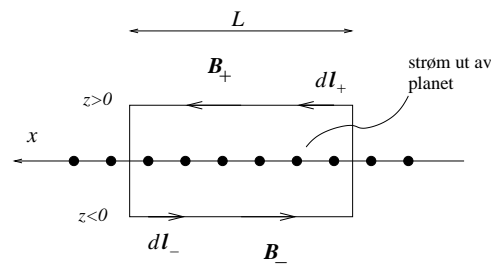
Oppgave 1

Retningen på \mathbf{B} :

- $B_y = 0$ fordi $d\mathbf{B} \sim \hat{y} \times \hat{r} \perp \hat{y}$ ifølge Biot-Savarts lov. (Alle strømbidrag går i y -retningen.)
- $B_z = 0$: Se på figuren nedenfor. Her er $d\mathbf{B}_+$ og $d\mathbf{B}_-$ bidrag til magnetfeltet henholdsvis over og under xy -planet fra "symmetrisk lokaliserte" uendelig lange, tynne strømførende ledere i posisjon $\pm x$. Biot-Savarts lov og figurbetraktning gir at \mathbf{B} må være rettet i positiv x -retning for $z > 0$ og i negativ x -retning for $z < 0$.



Absoluttverdien av magnetfeltet kan ikke avhenge av x eller y når det strømførende planet er uendelig stort. Dessuten må B være like stor en avstand z over xy -planet som en avstand z under. ($B_+ = B_- = B$, se figuren nedenfor) Da skulle vi ha det beste valget av ampereskurve klart: Et rektangel med flatenormal i positiv y -retning, symmetrisk plassert i forhold til xy -planet:



Når integrasjonsveien velges som vist i figuren, er strømmen omsluttet av ampereskurven *positiv*, ifølge høyrehåndsregelen. Med en lengde L i x -retningen blir den omsluttete strømmen $I_{\text{in}} = i \cdot L$. Amperes lov gir dermed:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2 \cdot B \cdot L = \mu_0 i \cdot L$$

eller

$$B = \mu_0 i / 2$$

(På de vertikale bitene av amperekurven er $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ så disse gir null bidrag til integralet.) Alternativt kunne vi først ha lagt hele ampererektangelet på en side av xy -planet. Da hadde vi hatt null omsluttet strøm, og dermed fått at B måtte være uavhengig av z . I neste omgang legger vi amperekurven slik at den omslutter en del av xy -planet, og dermed også en viss strøm, og finner det samme som over. Så langt jeg kan se, holder det å bruke Amperes lov *en* gang når vi legger amperekurven symmetrisk om xy -planet.

Oppgave 2

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\epsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banendreieimpulsen til elektronet er

$$\mathbf{L}_0 = m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 = m_e R v_0 \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\mathbf{m}_0 = I \mathbf{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2 \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R \hat{z} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}_0$$

b) Den valgte retningen på \mathbf{B} fører til at den magnetiske kraften $\mathbf{F}_m = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + e v B$$

Dette er en annengradslikning for v ,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e} v - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratrotten er negativ og ikke aktuell.)

La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.

Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\mathbf{B} = -B \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0 , og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.

Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.

Oppgave 3

Opplysningene gitt i oppgaveteksten medfører at vi her velger som amperekurve en sirkel som er ko-planar med smultringspolen, med sentrum på spolens akse og radius s . Hvis amperekurven ligger inni spolen, vil den omslutte N viklinger som hver fører en strøm I , dvs netto omsluttet strøm NI . Hvis amperekurven ligger utenfor spolen, vil den omslutte null netto strøm: Enten ingen strøm i det hele tatt, eller like mye strøm opp gjennom som ned gjennom den valgte omsluttete flaten. Amperes lov gir da, inni spolen:

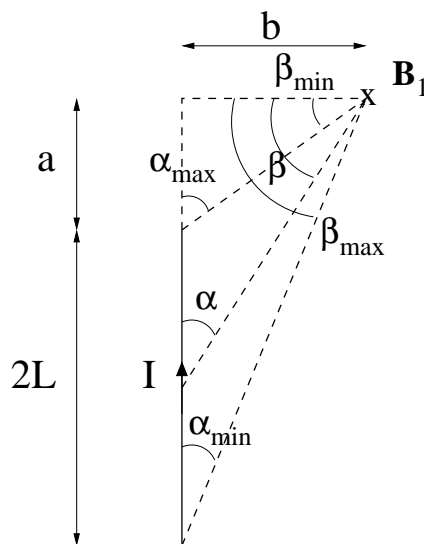
$$\begin{aligned} B(s) \cdot 2\pi s &= \mu_0 NI \\ \Rightarrow B(s) &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \end{aligned}$$

og utenfor spolen:

$$\begin{aligned} B(s) \cdot 2\pi s &= 0 \\ \Rightarrow B(s) &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 4

Det vi har bruk for i denne oppgaven, er et uttrykk for magnetfeltet \mathbf{B}_1 i et vilkårlig punkt, fra en rett strømførende leder med lengde $2L$, strømstyrke I . Med utgangspunkt i følgende figur,



har vi

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \beta_{\max} - \sin \beta_{\min}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_{\min} - \cos \alpha_{\max}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left(\frac{2L + a}{\sqrt{(2L + a)^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \end{aligned}$$

Hvis vi her setter $a = -L$ og $b = x$, har vi spesialtilfellet med et punkt i avstand x fra lederen, i planet som deler lederen på midten, dvs det vi så på i forelesningene. Men i denne oppgaven skal vi se på magnetfeltet fra en kvadratisk strømførende leder.

La oss starte med et punkt på z -aksen (se figur A nedenfor), og la oss anta $z > 0$. Vi antar også at strømmens retning er slik at det magnetiske dipolmomentet peker i positiv z -retning. De 4 sidekantene bidrar her med like stor feltstyrke. Avstanden fra hver rette lederbit til punktet på z -aksen er $b = \sqrt{z^2 + L^2}$, og vi har nettopp $a = -L$. Bruker vi uttrykket ovenfor, finner vi dermed

$$B_1 = \frac{\mu_0 I L}{2\pi b \sqrt{b^2 + L^2}} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi \sqrt{z^2 + L^2} \sqrt{(z^2 + L^2) + L^2}}.$$

Alle disse 4 bidragene har forskjellig retning, og summen av dem blir en vektor i positiv z -retning. Vi finner z -komponenten av B_1 ved å multiplisere med faktoren

$$\cos \theta = \frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2}}$$

slik at det totale feltet blir

$$\mathbf{B}(z) = \hat{z} \cdot 4 \cdot \frac{\mu_0 I L}{2\pi \sqrt{z^2 + L^2} \sqrt{z^2 + 2L^2}} \cdot \frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2}} = \frac{2\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi (z^2 + L^2) \sqrt{z^2 + 2L^2}}$$

I et punkt på x -aksen ($x > L$) vil sidekantene i $y = L$, $x = -L$ og $y = -L$ gi bidrag som peker i positiv z -retning, mens sidekanten i $x = L$ gir et bidrag i negativ z -retning (se figur B nedenfor). Vi ser på de 4 bidragene hver for seg.

Bidrag fra sidekant i $x = L$ ("nr 1"): Her er $b = x - L$ og $a = -L$, og vi finner

$$\mathbf{B}_1(x) = -\frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi} \frac{1}{(x-L)\sqrt{(x-L)^2 + L^2}}$$

Bidrag fra sidekant i $x = -L$ ("nr 3"): Her er $b = x + L$ og $a = -L$, og vi finner

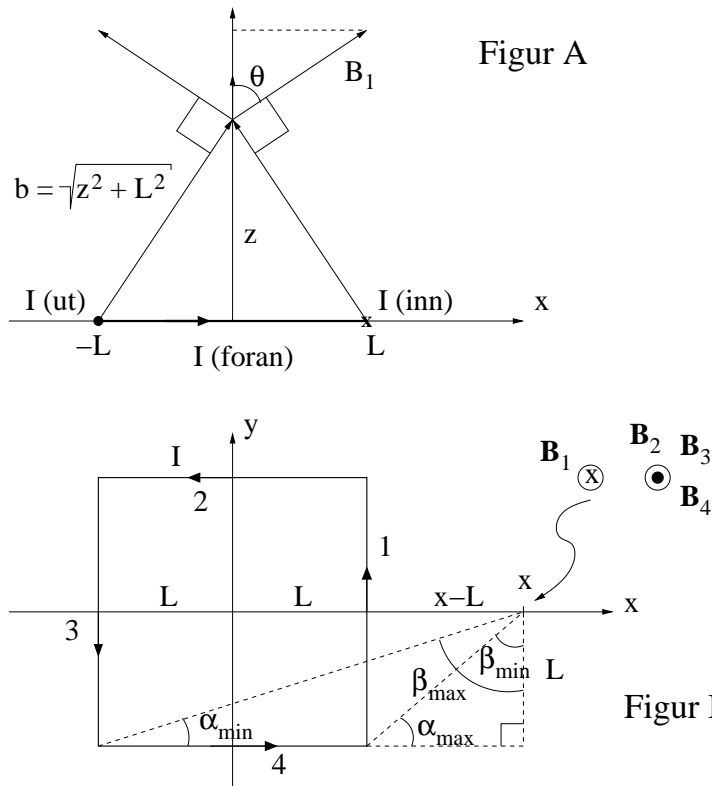
$$\mathbf{B}_3(x) = \frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi} \frac{1}{(x+L)\sqrt{(x+L)^2 + L^2}}$$

Bidragene fra sidekantene i $y = L$ ("nr 2") og $y = -L$ ("nr 4") er like store og har samme retning, så disse to tar vi i en smekk. I dette tilfellet er $b = L$ og $a = x - L$, som gir

$$\mathbf{B}_2(x) = \mathbf{B}_4(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left[\frac{x+L}{\sqrt{(x+L)^2 + L^2}} - \frac{x-L}{\sqrt{(x-L)^2 + L^2}} \right]$$

Totalt felt blir summen av disse 4:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1(x) + \mathbf{B}_2(x) + \mathbf{B}_3(x) + \mathbf{B}_4(x)$$



La oss nå regne ut hva magnetfeltet blir til ledende orden langt ute på hhv z - og x -aksen. Dette blir lettest langt ute på z -aksen. Da kan vi i uttrykket for $\mathbf{B}(z)$ ganske enkelt neglisjere L^2 og $2L^2$ i forhold til z^2 i nevneren:

$$\mathbf{B}(z) \simeq \frac{2\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi z^3}$$

Og dette er konsistent med $\mathbf{B}_{\text{dipol}}(\mathbf{r})$ gitt i oppgaveteksten: Sløyfa har magnetisk dipolmoment

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} = I \cdot 4L^2 \hat{z}$$

og for et punkt på z -aksen er

$$\hat{r} = \hat{z}$$

Dermed:

$$\mathbf{B}_{\text{dipol}}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi z^3} [3 \cdot 4IL^2 \hat{z} - 4IL^2 \hat{z}] = \frac{2\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi z^3}$$

For et punkt langt ute på x -aksen er

$$\hat{r} = \hat{x}$$

slik at første ledd i $\mathbf{B}_{\text{dipol}}$ forsvinner. Vi står igjen med

$$\mathbf{B}_{\text{dipol}}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3} [-4IL^2 \hat{z}] = -\frac{\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi x^3}$$

Vi regner ut ledende ordens bidraget fra den eksakte $\mathbf{B}(x)$:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \frac{1}{(1 - L/x)(1 - 2L/x + 2(L/x)^2)^{1/2}} \\ &\simeq -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \left(1 + \frac{L}{x}\right) \left(1 + \frac{L}{x}\right) \\ &\simeq -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \left(1 + \frac{2L}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3(x) &= \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \frac{1}{(1 + L/x)(1 + 2L/x + 2(L/x)^2)^{1/2}} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \left(1 - \frac{L}{x}\right) \left(1 - \frac{L}{x}\right) \\ &\simeq \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2} \left(1 - \frac{2L}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_2(x) + B_4(x) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[\frac{1 + L/x}{(1 + 2L/x + 2(L/x)^2)^{1/2}} - \frac{1 - L/x}{(1 - 2L/x + 2(L/x)^2)^{1/2}} \right] \\ &\simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[(1 + L/x)(1 - L/x + L^2/2x^2 + L^3/2x^3) - (1 - L/x)(1 + L/x + L^2/2x^2 - L^3/2x^3) \right] \\ &\simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left[\frac{2L^3}{x^3} \right] \end{aligned}$$

Og summen av disse blir nettopp

$$B(x) \simeq -\frac{\mu_0 I L^2}{\pi x^3},$$

dvs det samme som $B_{\text{dipol}}(x)$ ovenfor.