

Løsningsforslag til øving 15

*Oppgave 1*

Den påtrykte strømmen  $I$  genererer et  $H$ -felt  $H = nI$  på langs overalt inne i spolen (pga Amperes lov for  $H$ ). Dermed er det bare å benytte at

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

for å bestemme de ulike størrelsene:

Inne i jernstaven:

$$\begin{aligned} H_j &= nI = 2000 \text{ m}^{-1} \cdot 3 \text{ A} = 6000 \text{ A/m} \\ B_j &= \mu_r \mu_0 H_j = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (Vs/Am)} \cdot 6000 \text{ A/m} = 15 \text{ T} \\ M_j &= (\mu_r - 1)H_j = 1.2 \cdot 10^7 \text{ A/m} \end{aligned}$$

I den luftfylte delen inne i spolen:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_j = 6000 \text{ A/m} \\ B_0 &= \mu_0 H_0 = 7.5 \text{ mT} \\ M_0 &= 0 \end{aligned}$$

Den beregnede magnetiseringen inne i jernstaven,  $M_j = 1.2 \cdot 10^7$  A/m, er større enn metningsmagnetiseringen  $M_s = 1.6 \cdot 10^6$  A/m, og derfor ikke fysisk mulig. Årsaken er at vi har brukt den lineære sammenhengen  $B = \mu_r \mu_0 H$  mellom magnetfeltet  $B$  og feltet  $H$  fra den påtrykte strømmen. Her har vi imidlertid et så sterkt "ytre" felt  $H$  at en slik lineær sammenheng ikke lenger er gyldig. Samtlige magnetiske dipolmoment er rettet inn langs det påtrykte feltet allerede ved  $H \simeq M_s/\mu_r = 800$  A/m. Ytterligere økning i  $H$  gir ingen økning i  $M$ .

Korrigert, maksimal verdi for  $B_j$  blir

$$B_j^{\text{korrr}} = \mu_0 (H_j + M_s) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (6000 + 1.6 \cdot 10^6) = 2 \text{ T}$$

*Oppgave 2*

a) Vi har brukt Amperes lov i forelesningene til å regne ut magnetfeltet inne i en slik lang spole:

$$B = \mu_0 n I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} I_1$$

En vikling av spoletråden omslutter et areal  $A = \pi R^2$ , og dermed en magnetisk fluks

$$\phi = BA = \mu_0 \frac{N_1}{d} I_1 \pi R^2$$

Da må  $N_1$  viklinger omslutte en fluks som er  $N_1$  ganger så stor, for her er jo magnetfeltet konstant overalt inne i spolen. Altså:

$$\phi_1 = N_1 \phi = \mu_0 \frac{N_1^2}{d} I_1 \pi R^2$$

En vikling av spole 2 omslutter her akkurat det samme arealet, og dermed like stor fluks  $\phi$ , slik at  $N_2$  viklinger av spole 2 må omslutte en total magnetisk fluks lik

$$\phi_2 = N_2 \phi = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} I_1 \pi R^2$$

b) Selvinduktansen  $L$  blir

$$L = \frac{\phi_1}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{d} \pi R^2$$

c) Gjensidig induktans  $M$  blir

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} \pi R^2$$

d) Tallverdier:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1200^2}{0.6} \cdot \pi \cdot 0.01^2 = 9.5 \cdot 10^{-4}$$
$$M = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1200 \cdot 600}{0.6} \cdot \pi \cdot 0.01^2 = 4.7 \cdot 10^{-4}$$

I SI-systemet har induktans fått sin egen enhet, henry (H). Her blir altså selvinduktansen 0.95 mH og den gjensidige induktansen 0.47 mH. Alternativt kunne vi f.eks. ha brukt enheten T m<sup>2</sup>/A, ettersom magnetisk fluks må ha enheten til magnetfelt ganger areal, dvs T m<sup>2</sup>.

### Oppgave 3

Dielektrisk skive på tvers i konstant ytre elektrisk felt  $\mathbf{E}_0$ :

Her har vi grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan ikke uten videre bruke grenseflatebetingelsen for  $\mathbf{E}$  for vi vet ikke hvor mye ladning vi har i grenseflatene mellom vakuum og dielektrikum. Vi vet at det induseres bundet ladning, positiv i øvre flate og negativ i nedre flate, men ikke *hvor mye*. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for  $\mathbf{D}$ , for vi vet at det er null *fri* ladning i skiva. Dermed har vi  $D_1 = D_0$ , der  $D_0 = \varepsilon_0 E_0$  er elektrisk forskyvning utenfor skiva. Dessuten har vi at  $D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$ . Dermed:

$$D_1 = \varepsilon_0 E_0$$
$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$$

Dielektrisk skive på langs i konstant ytre elektrisk felt  $\mathbf{E}_0$ :

Nå har vi grenseflater parallelt med feltretningen. Da kan vi bruke at parallellkomponenten til  $\mathbf{E}$  er kontinuerlig, dvs  $E_1 = E_0$ . Sammenhengen  $D_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1$  gjelder selvsagt fortsatt, så

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0 \\ E_1 &= E_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på tvers i konstant ytre magnetfelt  $\mathbf{B}_0$ :

Her har vi igjen grenseflater som står normalt på feltene. Vi kan da benytte oss av at  $B_n$  er kontinuerlig, dvs  $B_1 = B_0$ . Dessuten har vi at  $B_1 = \mu_1 H_1 = \mu_r \mu_0 H_1$ . Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_r \mu_0} B_0 \\ B_1 &= B_0 \end{aligned}$$

Magnetiserbar skive på langs i konstant ytre magnetfelt  $\mathbf{B}_0$ :

Grenseflatene er parallelt med feltene. Vi vet at det induseres magnetiseringsstrøm i skivas overflate men ikke hvor mye. Men vi kan bruke grenseflatebetingelsen for  $\mathbf{H}$ , for vi vet at det er null fri strøm i skiva. Dermed har vi  $H_1 = H_0$ , der  $H_0 = B_0/\mu_0$  er  $H$ -feltet utenfor skiva (vakuum). Dessuten har vi  $B_1 = \mu_r \mu_0 H_1$ . Dermed:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \\ B_1 &= \mu_r B_0 \end{aligned}$$

Forklaring på ulik  $E_1$  og  $B_1$  i de to tilfellene:

Dielektrisk skive på tvers gir polarisering, og tilhørende induert ladning i overflaten. Den induerte ladningen gir bidrag til feltet motsatt rettet det ytre feltet, slik at  $E_1$  blir mindre enn  $E_0$ . Med skiva på langs blir den induerte overflateladningen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og  $E_1 = E_0$ .

Magnetiserbar skive på langs gir magnetisering, og tilhørende induert strøm i overflaten. Den induerte strømmen gir bidrag til feltet i samme retning som det ytre feltet, slik at  $B_1$  blir større enn  $B_0$ . Med skiva på tvers blir den induerte overflatestrømmen lokalisert uendelig langt unna "der vi er". Dermed bidrar den ikke til feltet der vi er, og  $B_1 = B_0$ .

#### Oppgave 4

a) Arealet som strømsløyfa omslutter er  $L \cdot x$ , og dette øker lineært med tiden,  $dA/dt = Ldx/dt = Lv$ . Omsluttet magnetisk fluks er  $\phi = B \cdot A = BLx$ , slik at induert ems i strømsløyfa blir  $\mathcal{E} = d\phi/dt = BLdx/dt = BLv$ . Sløyfa har resistans  $R$ , så ifølge Ohms lov blir strømmen i kretsen

$$I = \mathcal{E}/R = BLv/R$$

Strømmen går mot klokka. Det innser vi fordi kraften på en positiv ladning  $q$  i metallstanga,  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , er rettet oppover. Alternativt, med Lenz' lov: Økende areal gir økende omsluttet

magnetisk fluks inn i planet. Strømmen må da gå i en slik retning av fluksen på grunn av  $I$  peker ut av planet når vi er på innsiden av sløyfa.

b) Strømmen  $I$  går oppover i metallstanga, magnetfeltet peker inn i planet, så magnetisk kraft på strømmen  $I$  blir rettet mot venstre og er

$$F = ILB = B^2 L^2 v / R$$

c) Fra forrige punkt har vi altså at vi må trekke metallstanga bortover mot høyre med en kraft  $F$  for å opprettholde konstant hastighet. Slipper vi stanga, blir den eneste krafta som virker den (bremsende) magnetiske krafta mot venstre. Newtons 2. lov gir oss da følgende bevegelsesligning:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Dette er en 1. ordens differensialligning for  $v(t)$ . Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \\ \Rightarrow \ln v &= -\frac{B^2 L^2}{mR} t + \ln k \\ \Rightarrow v(t) &= k e^{-B^2 L^2 t / mR} \\ \Rightarrow v(t) &= v_0 e^{-B^2 L^2 t / mR} \end{aligned}$$

der vi brukte initialbetingelsen  $v(0) = v_0$ .

d) Vi må regne ut hvor mye energi som tapes som varme i motstanden. Effekttapet er lik  $VI$ , der  $V$  er spenningsfallet over motstanden, dvs  $V = RI$ . Da effekttap er energitap pr tidsenhet, kan vi skrive

$$dW = P dt = VI dt = RI^2 dt$$

for energien  $dW$  tapt på et tidsrom  $dt$ . Vi har i a funnet  $I$  uttrykt ved metallstangas hastighet  $v$ , så det er bare å sette inn. Totalt energitap må bli integralet av  $dW$ , dvs fra  $t = 0$  til  $t = \infty$ :

$$\begin{aligned} W &= \int dW \\ &= \int_0^\infty RI^2 dt \\ &= \int_0^\infty R \left( \frac{BLv}{R} \right)^2 dt \\ &= \frac{B^2 L^2 v_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2B^2 L^2 t / mR} dt \\ &= \frac{B^2 L^2 v_0^2}{R} \Big|_0^\infty \left( -\frac{mR}{2B^2 L^2} \right) e^{-2B^2 L^2 t / mR} \\ &= mv_0^2 / 2 \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

### Oppgave 5

a) Magnetfelt fra lang, rett strømførende leder er  $B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$ , der  $x$  er avstanden fra lederen. På planet som her er omsluttet av den kvadratiske sløyfa peker magnetfeltet rett ut av papirplanet.  $x$ -aksen er valgt oppover. Magnetfeltet og "flateelementvektoren"  $d\mathbf{A}$  er parallelle, så vi har rett og slett  $d\phi = B \cdot dA$  for fluks gjennom flatelement  $dA$ . Her velger vi horisontal stripe med bredde  $a$  og høyde  $dx$  som flatelement. Total fluks omsluttet av den kvadratiske sløyfa får vi ved å "summere" opp slike striper, dvs ved å integrere fra  $x = d$  til  $x = d + a$ . (Vi har valgt  $x = 0$  der den rette lederen ligger.)

$$\begin{aligned}\phi &= \int d\phi \\ &= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \Big|_d^{d+a} \ln x \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}\end{aligned}$$

b) Indusert ems er lik den tidsderiverte av omsluttet magnetisk fluks:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} (\ln(d+a) - \ln d) \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left( \frac{1}{d+a} \frac{dd}{dt} - \frac{1}{d} \frac{dd}{dt} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \frac{a}{(d+a)d}\end{aligned}$$

Her har vi brukt at  $v = dd/dt$ , og nå er ikke  $d$  en konstant avstand, men en avstand som øker lineært med tiden, f.eks.  $d(t) = d_0 + vt$ .

Fluksen opp av planet avtar med tiden. Da må indusert ems og tilhørende strøm bli *mot* klokka for å motvirke dette.

c) Hvis sløyfa trekkes mot høyre, endres ikke fluksen innenfor sløyfa. Dermed blir indusert ems lik null.