**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme**
**Vår 2008**

# Løsningsforslag til øving 4

*Oppgave 1*

$a$) Her har vi oppgitt $V(r,\theta)$ og gradientoperatoren i kulekoordinater, så det er bare å regne i vei (ingenting avhenger her av vinkelen $\phi$, så leddet som inneholder $\partial/\partial\phi$ trenger vi ikke å bry oss med):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(r,\theta) &= -\nabla V(r,\theta) \\ &= -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \hat{r}\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} + \hat{\theta}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand $r$ fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\boldsymbol{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

Hvis $\theta = 0$, får vi

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

og

$$E_\theta = 0$$

Dette virker rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på $z$-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs $z$-aksen, mens $\theta$-retningen blir langs $x$-aksen. Og på $z$-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs $z$-aksen.
Hvis $\theta = \pi/2$, får vi

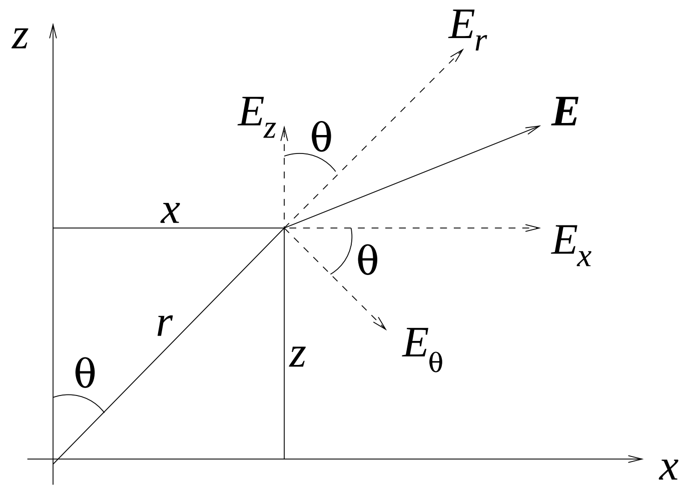
$$E_r = 0$$

og

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Dette virker også rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på $x$-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs $x$-aksen, mens $\theta$-retningen blir langs negativ $z$-akse. Og på $x$-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs negativ $z$-akse.
Setter vi inn $r = 0$ i uttrykkene for $E_r$ og $E_\theta$, ser vi at begge to går mot uendelig. Det er imidlertid ikke et reelt problem fordi vi nå forsøker å bruke uttrykket for $E$ utenfor gyldighetsområdet $r \gg a$. Feltet i origo er langt fra uendelig, og heller ikke vanskelig å regne ut. Det klarer du helt sikkert selv!

$b$) Av figuren nedenfor skulle det gå relativt klart fram hvordan den elektriske feltvektoren $\boldsymbol{E}$ enten kan dekomponeres i $E_r$ og $E_\theta$ eller i $E_x$ og $E_z$.




Både $E_r$ og $E_\theta$ har komponenter i $x$-retning, og den totale $x$-komponenten av feltet må bli summen av disse to. Figurbetraktning gir:

$$\begin{aligned}
E_x &= E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta \\
&= \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$ og $r = (x^2+z^2)^{1/2}$.
Helt tilsvarende finner vi $z$-komponenten:

$$\begin{aligned}
E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\left(2z^2 - x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

$c$) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p(z/r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

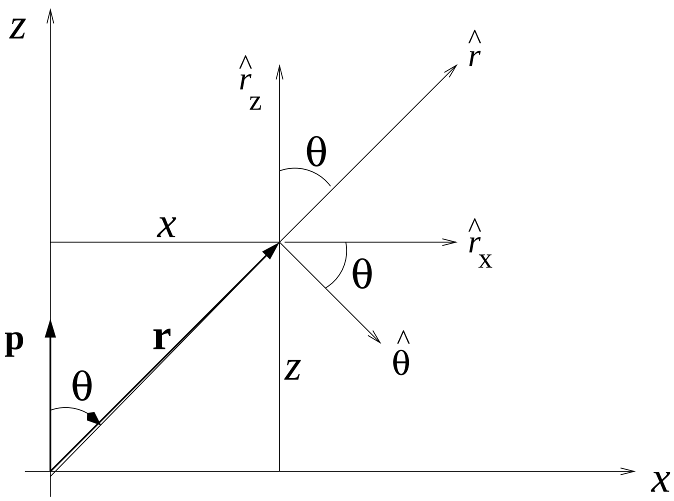
Med $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ får vi dermed

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p\left(x^2+z^2\right)+3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) \\
&= \frac{\left(2z^2-x^2\right)p}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Det samme som vi fant under punkt $b$)!

$d$) La oss starte med en figur som viser sammenhengen mellom de ulike vektorkomponentene:




Da har vi:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= p_x\,\hat{x} + p_z\,\hat{z} \\
p_x &= 0 \\
p_z &= p \\
\boldsymbol{p} &= p_r\,\hat{r} + p_\theta\,\hat{\theta} \\
\boldsymbol{p}\cdot\hat{r} &= p_r = p\cos\theta \\
\boldsymbol{p}\cdot\hat{\theta} &= p_\theta = -p\sin\theta \\
\hat{r} &= \hat{r}_x\,\hat{x} + \hat{r}_z\,\hat{z} \\
\hat{r}_x &= \sin\theta = x/r = x/\sqrt{x^2+z^2} \\
\hat{r}_z &= \cos\theta = z/r = z/\sqrt{x^2+z^2}
\end{aligned}
$$

Vi har nå det vi trenger for å skrive ned $E_r$ osv, fra det gitte uttrykket på koordinatfri form:

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\boldsymbol{p}\cdot\hat{r} - p_r\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p_r - p_r\right] \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[0 - p_\theta\right] \\
&= \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(p\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}_x - p_x\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p(z/r)(x/r) - 0\right] \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(p\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}_z - p_z\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p(z/r)(z/r) - p\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3z^2/r^2 - 1\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3z^2/(x^2+z^2) - (x^2+z^2)/(x^2+z^2)\right] \\
&= \frac{(2z^2 - z^2)p}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Alle fire i samsvar med det vi fant i $a$) og $b$).

*Oppgave 2*

$a$) **D**

Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

der summen går over alle par av ladninger $q_i$ og $q_j$ i innbyrdes avstand $r_{ij}$. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9\cdot 10^9 \cdot (9\cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50}\cdot 10^{-2}}\right] \simeq -38 \text{ J}$$

*b*) **D**
Punktladningene $Q_1$ og $Q_2$ flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene $Q_1$ og $Q_2$ i punktene A og B, hhv $V_A$ og $V_B$, og deretter endringen i potensiell energi, $\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand $r$ fra en punktladning $q$ er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra $Q_1$ til A og fra $Q_2$ til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra $Q_1$ til B og fra $Q_2$ til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

*c*) **B**. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ når $V(r \to \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

*d*) **D**. Det elektriske feltet er den negative gradienten til potensialet, $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Her har vi oppgitt at potensialet er konstant lik 100 V, og gradienten til en konstant er lik null.

*e*) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

*f*) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = -15\frac{\text{V}}{\text{m}}\hat{x}$$

*g*) **A**

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\frac{\text{V}}{\text{m}}$$