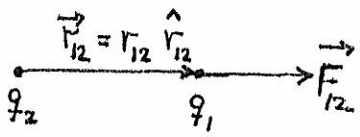
ELMAG: Oppsummering 6. mai 2008

Elektrostatikk $\boxed{Ø1-Ø9}$

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\hat{r}_{12}$



$\boxed{Ø1/4-5}$

Superposisjonsprinsippet: $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_j \dfrac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$
(SPP)

$\boxed{\text{Des } 03/1}$ = total kraft på q_i fra flere q_j

Elektrisk felt: $\vec{E} = \vec{F}/q$ = elektrisk kraft pr ladningsenhet som virker på q

Punktladning: $\vec{E} = \dfrac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Felt fra flere punktladninger: $\vec{E} = \sum_j \dfrac{q_j \hat{r}_j}{4\pi\varepsilon_0 r_j^2}$ (SPP!)

$\boxed{\text{Des } 02/1}$

Felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\boxed{\text{Des } 03/3}$

1D: $dq = \lambda\, dl = \lambda(x)\, dx$ $\quad [\lambda] = C/m$ $\quad \boxed{Ø2/3}$

2D: $dq = \underbrace{\sigma}_{C/m^2}\, dA = \sigma(x,y)\, dx\, dy$

$\sigma(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi \xrightarrow[\text{symm.}]{\text{sylinder-}} 2\pi\sigma(r)\, r\, dr$

$\boxed{Ø2/4}$

3D: $dq = \underbrace{\rho}_{C/m^3}\, dV = \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

$\rho(s,\varphi,z)\, s\, ds\, d\varphi\, dz \xrightarrow[\text{symm.}]{\text{sylinder-}} 2\pi\rho(s,z)\, s\, ds\, dz$

$\rho(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \xrightarrow[\text{symm.}]{\text{kule-}} 4\pi\rho(r)\, r^2\, dr$

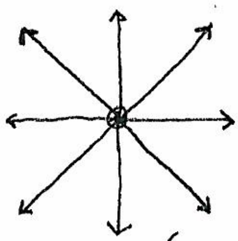
$\boxed{Ø3/3}$ $\quad \boxed{Ø6/1}$

Feltlinjer for $\vec{E}$: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

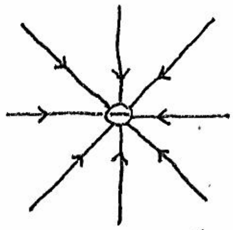
$\boxed{Ø2/5}$

$E = |\vec{E}| \sim$ antall feltlinjer pr flateenhet

Punktladning:

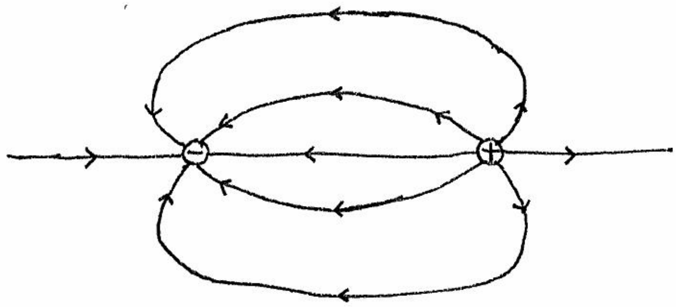


$(q>0)$



$(q<0)$

Elektrisk dipol:



$\boxed{\begin{matrix} Ø3/4 \\ Ø4/1 \end{matrix}}$

Dipolmoment : $\vec{p} = q\vec{d}$

For kontinuerlig ladningsfordeling (med $Q = \int_V \rho \, dV = 0$):

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{r} \, dV$$

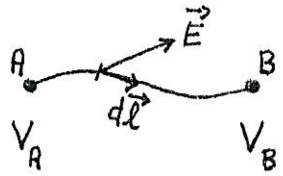
$\boxed{Ø6/4}$

$\boxed{\text{Mai } 05/3}$

Elektrisk potensial = pot. energi pr ladningsenhet:

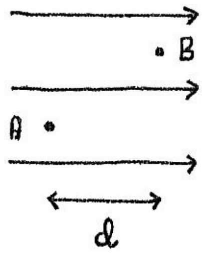
$$V = U/q \quad ; \quad [V] = \text{V} = \text{J}/\text{C}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Ø3/2

Uniformt E-felt:



$$\Delta V = V_B - V_A = -E \cdot d$$

Potensial fra punktladning: $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad (V(\infty) = 0)$
(Coulombpotensialet) Des 03/1

Fra flere punktladninger: $V = \sum_j \dfrac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_j}$ (SPP!)
Des 02/1 Ø3/4

Fra kontinuerlig ladningsfordeling: $V = \int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$
Mai 05/3

Ekvipotensialflater = flater med konstant V

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \text{ekvipotensialflater}$$

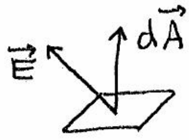
$$\vec{E} = -\nabla V$$

Ø4

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} = \text{gradient-operator}$$

Elektrostatisk felt er konservativt: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Elektrisk fluks:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Fluks gjennom S:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Flateelement: $d\vec{A} = dx\, dy\, \hat{z}$

$d\vec{A} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$ osv

Hvis kulesymmetri : $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

anta S = kuleflate med radius R $\Rightarrow$ $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R) \cdot 4\pi R^2$

Hvis <u>lukket</u> flate S: $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ = <u>netto</u> fluks <u>ut</u> gjennom S

Gauss' lov for $\vec{E}$:

Ø5

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

(lukket flate S omslutter volum V)

Bruker Gauss' lov til å bestemme $\vec{E}$ når

- kulesymmetri Ø6 Mai 04/1
- plansymmetri Ø6 Jun 07/2
- sylindersymmetri Ø5/2 Mai 06/1

(eller kombinasjoner av disse)

Ledere (metaller): har frie (mobile) ladninger

Jun 07/1

I likevekt:
- $\vec{E} = 0$ inni leder
- $\rho = 0$ — " —
- netto ladning på overflaten
- $\vec{E} \perp$ overflaten på overflaten
- konstant V på hele lederen
- $E = \sigma/\varepsilon_0$ på overflaten
- $E = 0$ i (tomt) hulrom

Ø6/2

Isolator / Dielektrikum: ingen mobile ladninger

Ø5/4 Jun 07/1

ytre felt $\vec{E}_0$ $\Rightarrow$ innretting av dipoler

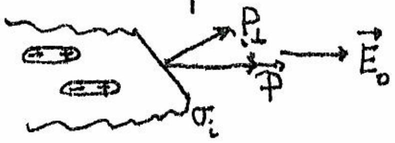
$\boxed{\tau = \vec{p} \times \vec{E}_0}$ $\Rightarrow$ indusert ladning $\pm\sigma_i$ pr flateenhet på overflaten

Jun 07/1

Polarisering: $\vec{P}$ = dipolmoment pr volumenhet $= \vec{p}/V$

Ø6/3

$P_\perp = \sigma_i$



Elektrisk forskyvning: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Des 02/4

Gauss' lov: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f$ = netto fri ladning innenfor S Mai 04/1

Mai 06/1

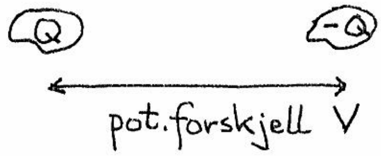
Lineær respons: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

Ø7-10

Kondensator = to adskilte ledere

Kapasitans: $C = Q/V$

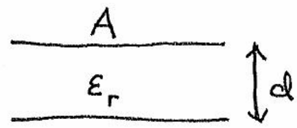


C bestemmes slik:

- anta ladning $\pm Q$
- regn ut V (muligens først $\vec{E}$)
- "les av" $C = Q/V$

Ø7-10

Parallellplatekondensator: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{d}$



Des02/4 Mai05/1 Des03/1

Energi lagret i elektrisk felt, pr volumenhet: $u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

Elektrisk strøm

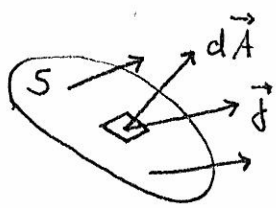
Ø10-11

Strøm = ladninger i bevegelse, dvs ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$\Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$$

Strømtetthet = strøm pr flateenhet

$$\Rightarrow j = \frac{I}{A}$$



strøm gjennom dA: $dI = \vec{j} \cdot d\vec{A}$

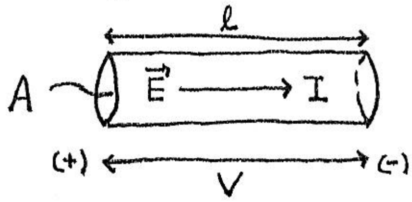
$\Rightarrow$ ——— " ——— S: $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$

Mai04/2 Ø10/1 Des03/5

Mai 04/5

Ohms lov: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; σ = elektrisk ledningsevne

Mai 05/1



$$I = j \cdot A = \sigma \cdot E \cdot A = \sigma \cdot \frac{V}{\ell} \cdot A$$

$$\Rightarrow V = \frac{\ell}{\sigma A} \cdot I$$

$$= R \cdot I$$

Resistivitet : $\rho = 1/\sigma$ ← materialspesifikke Ø11

Konduktans : $G = 1/R$ ← også dimensjonsavhengige

Elektrisk effekt: $P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V \Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$; $[P] = \frac{J}{s} = W$

(<u>hvis ohmsk</u> materiale: $P = RI^2 = V^2/R$)

Des 02/3 Des 03/2 Mai 04/3 Mai 05/1

Seriekobling av motstander : $R = \sum_j R_j$

———— " ———— kapasitanser: $C^{-1} = \sum_j C_j^{-1}$

Parallellkobling av motstander: $R^{-1} = \sum_j R_j^{-1}$

———— " ———— kapasitanser: $C = \sum_j C_j$

Må <u>forstås</u> og kunne <u>utledes</u>

Ø11

Ø9-10

Mai 06/2

<u>Kretser</u>: Ø11.

Likespenningskilde : $\mathcal{E}$ = elektromotorisk spenning (konstant)

Vekselspenningskilde : $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$ Ø12

($\Rightarrow$ impedans $Z(\omega) = V_0 / I_0(\omega)$)

Des 02/6

K1: Ladningsbevarelse $\Rightarrow \sum_j I_j = 0$ i alle kretsens knutepunkt

K2: Energi —"— $\Rightarrow \sum \Delta V = 0$ for —"— lukkede sløyfer

RC-kretser: "Løses" ved å bruke $I = \frac{dQ}{dt}$,

$\Delta V_R = RI$, $\Delta V_C = Q/C$ samt K1 og K2

Mai 05/1

(både med $\mathcal{E} = V_0$ og $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$)

Mai 05/5

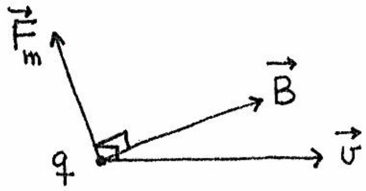
Tidskonstant: $\tau = RC$

Ø11

Mai 04/4 Des 03/4 Jun 07/3

Magnetostatikk

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Hvis både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ samtidig: Ø12/1 Des 03/2

Jun 07/2

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentzkraften

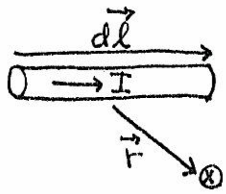
Uniformt B-felt $\Rightarrow$ sirkelbevegelse, $r = \frac{mv}{qB}$ Ø12/2

(evt spiral "langs" $\vec{B}$)

vinkelfrekvens $= \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$ ("syklotron-frekvensen")

$\vec{B}$-felt skapes av strøm I:

Des 02/2



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts Lov

$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am = vakuum-permeabiliteten

$[B] = T$ (tesla); 1 gauss $= 1G = 10^{-4}$ T

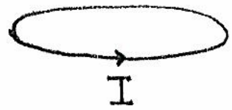
SPP gjelder for $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

Ø12/3 $\quad$ = felt fra lukket strømsløyfe

Lang, rett leder $\Rightarrow B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$ $\quad$ (x = avstand fra lederen)

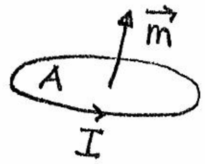
Magnetiske feltlinjer: samme def. som for $\vec{E}$
alltid <u>lukkede</u> feltlinjer for $\vec{B}$
(pga ingen magnetiske "monopoler")

Magnetisk dipol:



(lukket strømsløyfe)

Magnetisk dipolmoment:



$\vec{m} = I\vec{A}$

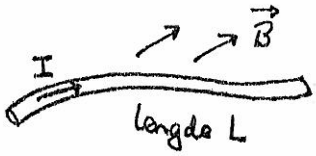
Ø12-14

Generell definisjon: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j})\, dV$

Elementærpartikler (e, p, n, ...), atomer osv. er små magnetiske dipoler.

Kompassnål, jorda etc. er større magn. dipoler.

Kraft på elektrisk strøm: $\vec{F} = I \int_L d\vec{l} \times \vec{B}$ $\quad$ Ø14/1



Mai06/3

Mai 04/5

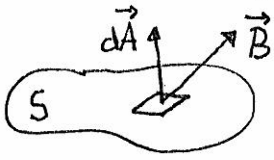
Des 03/2

Amperes Lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ $\boxed{\text{Mai 04/2}}$

Nyttig når passende symmetri, slik at $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ blir "enkelt"

- sylindersymmetri $\boxed{\text{Des 03/5}}$
- lang spole
- plansymmetri $\boxed{\text{Jun 07/2}}$ $\boxed{\text{Ø13}}$
- torus $\boxed{\text{Des 02/5}}$

Magnetisk fluks:



Fluks gjennom dA:

$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow$ Fluks gjennom S: $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Gauss' lov for $\vec{B}$: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

Magnetisme: $\boxed{\text{Ø13-15}}$

Paramagnetisme: innretting av permanente $\vec{m}$ langs ytre $\vec{B}_0$

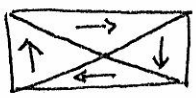
Diamagnetisme: indusert $\vec{m}$ motsatt rettet $\vec{B}_0$

Ferromagnetisme: vekselvirkning mellom $\vec{m}_i$ og $\vec{m}_{i\pm 1}$

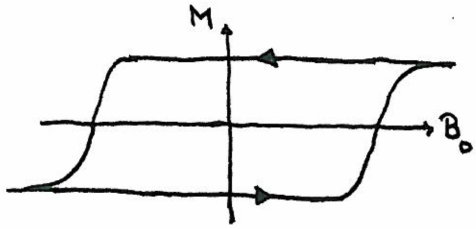
$\Rightarrow$ "alle" $\vec{m}_i$ i samme retning $\left(U = -J \sum_i \vec{m}_i \cdot \vec{m}_{i+1}\right)$

(evt $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \cdots$ hvis <u>anti</u>ferromagnet)

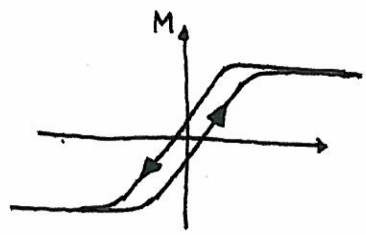
Magn. domener:



Magn. hysterese:



hard magnet

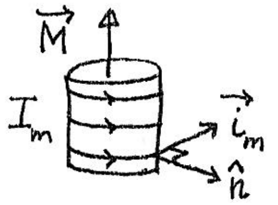


bløt magnet

Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$ = magn. dipolmoment pr volumenhet

ytre felt $\vec{B}_0$ $\Rightarrow$ innretting av dipoler

$\Rightarrow$ indusert overflatestrøm i_m pr lengdeenhet



$\vec{i}_m = \vec{M} \times \hat{n}$; $i_m = M$

H-feltet: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

$\boxed{\text{Mai 05/2}}$

Amperes lov: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$ = netto fri omsluttet strøm

$\boxed{\text{Ø15/1}}$

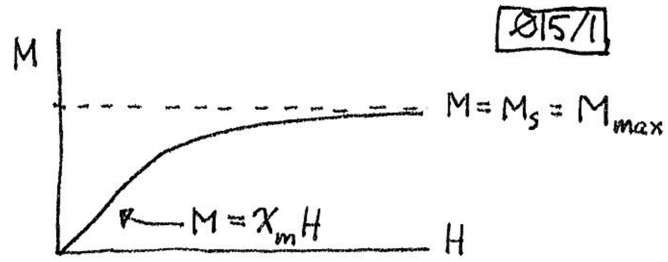
Lineær respons: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Paramagnet: $\chi_m \sim 10^{-4}$ Ferromagnet: $\chi_m \sim 10^3$

Diamagnet: $\chi_m \sim -10^{-5}$

$\boxed{\text{Ø15/1}}$



Elektrodynamikk

Induksjonsloven: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$ Ø15 Mai 05/4

Des 03/2 Des 03/6 ↳ Lenz' Lov Mai 04/5

Des 02/5

Indusert elektrisk felt: $\mathcal{E} = \oint d\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$ Faraday-Henrys Lov

Gjensidig induktans: strøm I_1 i sløyfe 1 gir fluks ϕ_2 gjennom (areal omsluttet av) sløyfe 2; $\phi_2 = M_{21} I_1$; og omvendt, $\phi_1 = M_{12} I_2$ $(M_{21} = M_{12} = M)$ Ø15/2

Des 02/5

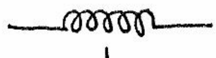
Gjensidig induksjon: $\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow \dot{\phi}_2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\dot{\phi}_2 = -M\dot{I}_1$,
og omvendt, $\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow \dot{\phi}_1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\dot{\phi}_1 = -M\dot{I}_2$

Jun 07/4

Selvinduktans: strøm I i sløyfe gir fluks ϕ gjennom sløyfa; $\phi = LI$ Mai 05/2 Ø15/2

Selvinduksjon: $\dot{I} \neq 0 \Rightarrow \dot{\phi} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E} = -\dot{\phi} = -L\dot{I}$

$[M] = [L] = H$ (henry)

Kretselement:  $\Delta V_L = -L\dot{I}$

L

RL-kretser: "Løses" med $I = \dot{Q}$, $\Delta V_R = RI$, $\Delta V_L = -L\dot{I}$ samt K1 og K2 (både med $\mathcal{E} = V_0$ og $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$)

Mai 06/4

Mai 05/5

Des 02/6

Mai 04/4

Tidskonstant: $\tau = L/R$

Energi lagret i magnetfelt, pr volumenhet: $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$\Rightarrow u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ = energi pr volumenhet i elektromagnetisk felt, $\vec{E}$ og $\vec{B}$

Ampere-Maxwells lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Maxwells ligninger:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\varepsilon_0 \qquad (\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0)$

$[\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f \qquad (\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f)]$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (\nabla \cdot \vec{B} = 0)$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

$[\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} \qquad (\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})]$

Grenseflatebetingelser: $(\Delta E_\parallel = 0,\ \Delta E_\perp = \sigma/\varepsilon_0,\ \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{i} \times \hat{n})$ $\boxed{07,14}$

$\Delta \vec{E}_\parallel = 0,\ \Delta D_\perp = \sigma_f,\ \Delta B_\perp = 0,\ \Delta \vec{H}_\parallel = \vec{i}_f \times \hat{n}$