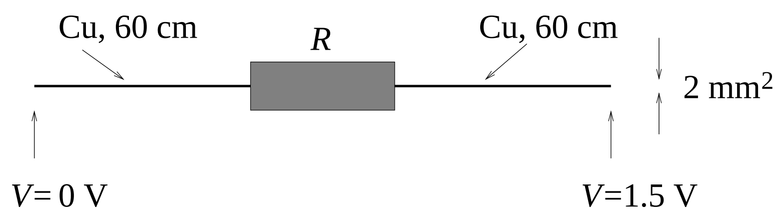
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Øving 11

Veiledning: Fredag 28. og mandag 31. mars
Innleveringsfrist: Fredag 4. april

Oppgave 1

En spenningskilde $V = 1.5$ V er koblet til en motstand med resistans $R = 20\ \Omega$ ved hjelp av to 60 cm lange kobberledninger med tverrsnitt 2 mm^2.



a) Hvor stort blir spenningsfallet over henholdsvis Cu–trådene og motstanden? [Svar: 0.75 mV og 1.5 V]

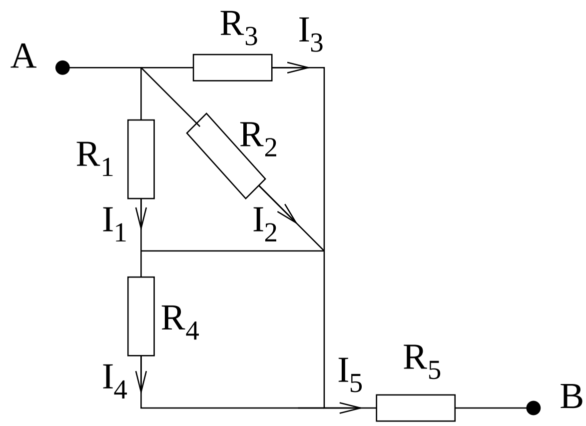
b) Bestem strømstyrken og utviklet effekt i motstanden. [Svar: ca 0.075 A og 0.11 W]

c) Hva blir de frie elektronenes midlere driftshastighet gjennom Cu–trådene? Anta her ett fritt elektron fra hvert Cu–atom. Sammenlign med midlere termiske hastighet for et elektron ved romtemperatur. (Midlere kinetisk energi pr elektron ved temperatur T er $3k_BT/2$, der k_B er Boltzmanns konstant.) [Svar: 2.76 μm/s og ca 10^5 m/s.]

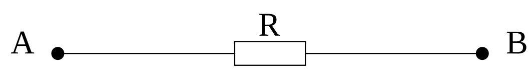
Oppgitt: Tetthet for Cu: 8960 kg/m^3. Molar masse for Cu: 63.54 g/mol. Elektrisk ledningsevne for Cu ved romtemperatur: $5.8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Boltzmanns konstant: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Oppgave 2

Figuren nedenfor viser en elektrisk krets med 5 motstander R_j, $j = 1, .., 5$.



a) Bestem total motstand R mellom punktene A og B, dvs: Bestem motstanden R i den ekvivalente kretsen i følgende figur:



b) En ideell spenningskilde med elektromotorisk spenning $\mathcal{E}$ kobles til kretsen slik at $\Delta V = V_A - V_B = \mathcal{E}$. Bestem hvor stor strøm I_j som da passerer gjennom hver av motstandene R_j. (Med mindre noe annet er spesifisert, regner vi alltid i slike oppgaver med at ledningene mellom de ulike motstandene er *perfekte ledere*, dvs med null motstand.)

Oppgave 3

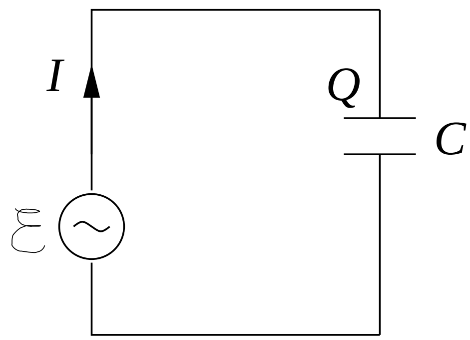
En kondensator med kapasitans C har ladning $\pm Q_0$. Kondensatoren kobles ved tidspunktet $t = 0$ til en motstand R slik at vi får en lukket krets, og det begynner å gå en strøm i kretsen. Bestem kondensatorladningen $Q(t)$ og strømmen $I(t)$ for $t \geq 0$.

Oppgave 4

For en likestrømkrets med spenningskilde V_0 som leverer en strøm I_0 vil kretsens totale resistans R være gitt ved Ohms lov, $R = V_0/I_0$.
For en vekselstrømkrets med spenningskilde $V_0 \cos \omega t$ som leverer en strøm $I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ kan vi på tilsvarende måte definere en "generalisert motstand", eller *impedans* Z, for kretsen: $Z = V_0/I_0$. Vi holder her muligheten åpen for at strømmen kan være *faseforskjøvet* med α i forhold til den påtrykte spenningen. Vi skal også se i eksemplene nedenfor at strømamplituden I_0 kan bli avhengig av (vinkel-)frekvensen ω, slik at impedansen også kan bli frekvensavhengig,

dvs $Z = Z(\omega)$.
I forelesningene regnet vi ut at med en spenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en enkel resistans R blir strømmen $I_0 \cos \omega t$, med amplitude $I_0 = V_0/R$. Dermed blir impedansen til en motstand R simpelthen $Z_R = R$.

a) En vekselspenningskilde $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$ er koblet til en kapasitans C:

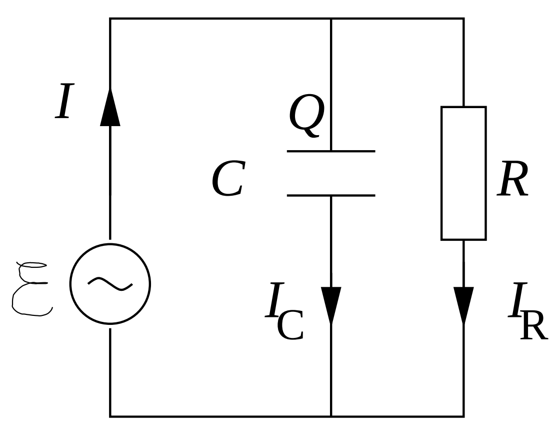


Bestem ladningen $Q(t)$ på kondensatoren og strømmen $I(t)$ i kretsen. Tegn opp $\mathcal{E}(t)$ og $I(t)$ mellom $t = 0$ og $t = T = 2\pi/\omega$.
Vis at strømmen kan skrives på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

og bestem (den frekvensavhengige) strømamplituden I_0 og fasevinkelen α. Hva blir da impedansen $Z_C(\omega)$ til en kapasitans C?

b) En vekselspenningskilde $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$ er koblet til en parallellkobling av en kapasitans C og en motstand R:



Bruk Kirchhoffs regler til å bestemme strømstyrkene $I(t)$, $I_C(t)$ og $I_R(t)$. Vis at den totale strømmen som leveres av spenningskilden kan skrives på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

med amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

og fasevinkel

$$\alpha = -\arctan(\omega RC)$$

Tips: Benytt $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.

Anta at spenningskilden har amplitude $V_0 = 1.0$ V og frekvens $f = 1.0$ MHz, og at $R = 10\,\Omega$ og $C = 16$ nF. Bestem tallverdier for I_0 og α. Skisser $\mathcal{E}(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$ for t mellom 0 og $T = 1/f$. (Svar: $I_0 = 0.14$ A, $\alpha = -45°$)

Med de gitte tallverdiene for V_0, R og C, skisser funksjonene $I_0(\omega)$, $\alpha(\omega)$ og kretsens impedans $Z(\omega) = V_0/I_0(\omega)$ for vinkelfrekvenser mellom 10^5 og 10^9 s^{-1}. Tips: Bruk *logaritmisk* skala langs ω-aksen, dvs skisser I_0 og α for vinkelfrekvenser slik at $\log \omega$ varierer mellom verdiene 5 og 9.

Oppgave 5

Figuren viser to kuleformede ledere med radius hhv a (innerst) og b (ytterst). Området i mellom disse er fylt med et materiale med resistivitet ρ.
(NB: Merk at symbolet ρ her står for resistivitet, eller invers konduktivitet, ettersom $\rho = 1/\sigma$. Her betyr altså ikke ρ ladning pr volumenhet...!)
En tynn, isolert tilførselsledning går gjennom et lite hull i den ytterste lederen og inn til innerste leder. En stasjonær (dvs tidsuavhengig) elektrisk strøm går "gjennom systemet" som vist i figuren, og da er potensialforskjellen mellom indre og ytre leder $\Delta V = V_a - V_b$, med størst potensial innerst. Anta at tilførselsledningene har neglisjerbar motstand i forhold til materialet mellom indre og ytre leder og vis at systemets resistans er $R = \rho(a^{-1} - b^{-1})/4\pi$. Du kan gjøre dette på en av to måter (eller begge!):

1. Med utgangspunkt i at motstanden til et kuleskall med radius r og tykkelse dr er $dR = \rho dr/4\pi r^2$.

2. Ved å anta at den innerste kula har ladning Q og bestemme både ΔV og strømstyrken $I = \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A} = \rho^{-1} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$.