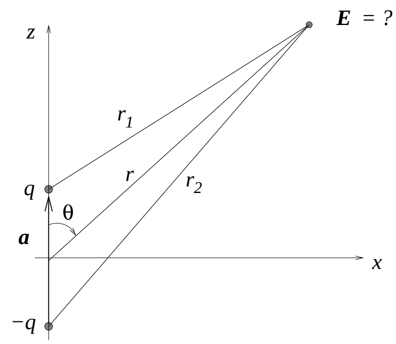
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Øving 4

Veiledning: Fredag 1. og mandag 4. februar
Innleveringsfrist: Fredag 8. februar

Oppgave 1



I oppgave 4 i øving 3 betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på z-aksen i $z = \pm a/2$. Vi viste at potensialet V i stor avstand ($r \gg a$) fra dipolen er tilnærmet lik

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Her er r avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, θ er vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{r}$, og $p = |\boldsymbol{p}| = qa$ er dipolens elektriske dipolmoment.

a) Ta utgangspunkt i uttrykket for $V(r, \theta)$ og bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$ i stor avstand fra dipolen.
Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Du får ikke oppgitt noe fasitsvar her, men du kan til en viss grad sjekke om du har regnet riktig ved å se om resultatet virker rimelig for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Hva med $r = 0$?

b) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring z-aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i xz-planet. Bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(x, z) = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for E_r og E_θ i punkt *a*). Tegn opp en figur og finn sammenhengen mellom koordinatene (x, z) og (r, θ), og feltkomponentene E_x, E_z og E_r, E_θ.
[Fasit: $E_x = 3pxz/4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{5/2}$, $E_z = p(2z^2 - x^2)/4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{5/2}$.]

c) Bestem også $\boldsymbol{E}(x, z)$ ved først å skrive om $V(r, \theta)$ til $V(x, z)$, og deretter anvende gradientoperatoren i kartesiske koordinater.

d) En *ideell elektrisk dipol* tilsvarer (formelt) at vi lar avstanden d mellom q og $-q$ gå mot null, uten at dipolmomentet $p = qd$ forsvinner. Det innebærer at vi må la $q \to \infty$ og $d \to 0$ samtidig, og på en slik måte at produktet $p = qd$ blir endelig (dvs verken null eller uendelig). I *praksis* tilsvarer dette at vi befinner oss i stor avstand r fra dipolen, slik vi nettopp har gjort i denne oppgaven.
Det elektriske feltet fra en slik ideell elektrisk dipol kan skrives på såkalt *koordinatfri form*:

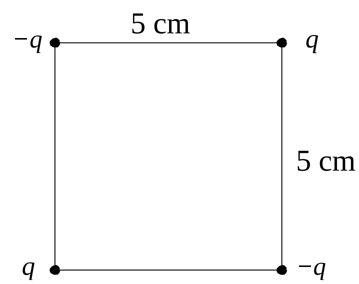
$$\boldsymbol{E}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\boldsymbol{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \boldsymbol{p}\right]$$

Vis at dette uttrykket er i samsvar med $\boldsymbol{E}(r,\theta)$ og $\boldsymbol{E}(x,z)$ som du regnet ut i hhv a) og b).

Oppgave 2 (fra tidligere midtsemesterprøver)

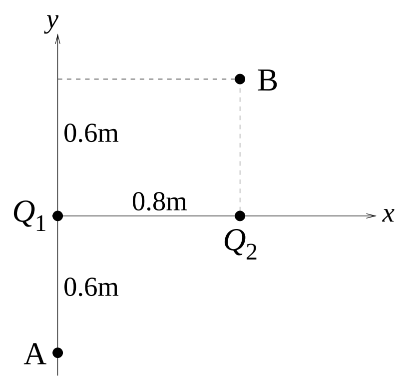
a) Fire punktladninger, to positive og to negative ($q = 9\ \mu$C), er plassert i hjørnene på et kvadrat med sidekanter 5 cm, som vist i figuren. Hva er systemets potensielle energi?

A 19 J
B Null
C -7 J
D -38 J



b) To punktladninger $Q_1 = 69$ nC og $Q_2 = -98$ nC er plassert i xy-planet, som vist i figuren. Et elektron flyttes fra punkt A til punkt B. Hvor stor endring gir denne forflytningen i systemets potensielle energi? ("Systemet" = de to punktladningene og elektronet.) (1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J)

A -1 keV
B -1 eV
C 1 eV
D 1 keV



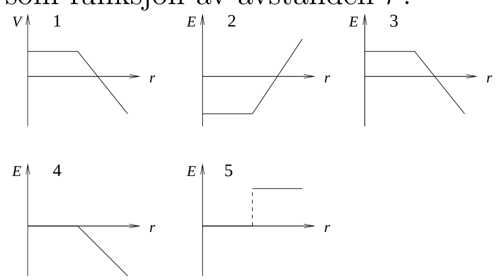
c) Hvor stor er radien til en (kuleformet) ekvipotensialflate på 50 V med en punktladning 10 nC i sentrum? Null potensial velges uendelig langt unna.

A 1.3 m
B 1.8 m
C 3.2 m
D 5.0 m

d) Potensialet i et område er $V(x, y, z) = 100$ V. Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ i dette området er da

A (100 V/m) $\hat{x}$
B (100 V/m) $\hat{y}$
C (100 V/m) $\hat{z}$
D null

e) Hvis potensialet V som funksjon av avstanden r fra en ladningsfordeling er som vist i graf nr 1, hvilken graf viser da det elektriske feltet E som funksjon av avstanden r?



A 2
B 3
C 4
D 5

f) Potensialet i et område er

$$V(x) = 50 \text{ V} + (15 \text{ V/m})x$$

Det elektriske feltet i dette området er da

A 50 V $\hat{x}$
B (15 V/m) $x\,\hat{x}$
C (15 V/m) $\hat{x}$
D −(15 V/m) $\hat{x}$

g) Potensialet i et område er

$$V(x, y, z) = (2 \text{ V/m})x + (3 \text{ V/m})y + (4 \text{ V/m})z$$

Da er x-komponenten av det elektriske feltet i dette området

A −2 V/m
B −3 V/m
C −4 V/m
D −9 V/m