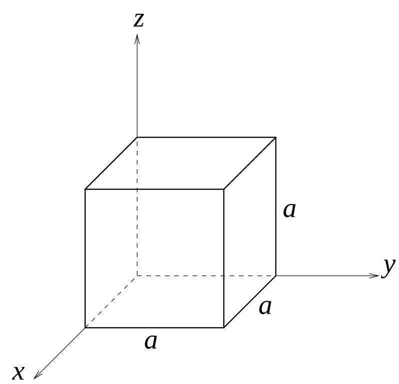
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008

Øving 5

Veiledning: Fredag 8. og mandag 11. februar
Innleveringsfrist: Fredag 15. februar kl 12.00

Oppgave 1



Figuren over viser en gaussflate (dvs lukket flate) S formet som en kube med sidekanter a. Flaten er plassert i et område hvor det er en elektrisk feltstyrke $\boldsymbol{E}$. I hvert av tilfellene a) – d), bestem total (netto) elektrisk fluks ϕ som passerer gjennom flaten S. Bruk Gauss' lov og bestem i hvert tilfelle også den totale ladningen Q innenfor S.

$$\begin{aligned}
a)\ \boldsymbol{E} &= C\hat{x} \\
b)\ \boldsymbol{E} &= Cx^2\hat{x} \\
c)\ \boldsymbol{E} &= C\,(y\hat{x} + x\hat{y})
\end{aligned}$$

Her er C en (skalar) konstant (og da med varierende enhet).

d) For tilfellet b) skal du bestemme ladningstettheten ρ innenfor S. Ta utgangspunkt i Gauss' lov idet du betrakter et lite (infinitesimalt) volumelement $a^2\,dx$, dvs en tynn skive med tykkelse dx og endeflater med areal a^2, lokalisert mellom x og $x + dx$. (Mer presist: Bruk Gauss' lov på flaten som omslutter dette volumelementet.)

Noen svar: b): $Q = C\varepsilon_0 a^4$ $\quad$ d): $\rho = 2C\varepsilon_0 x$

Oppgave 2

Bruk Gauss' lov til å bestemme det elektriske feltet i avstand r fra en uendelig lang (tynn) stav med ladning λ pr lengdeenhet.
Tips: Utnytt sylindersymmetrien i problemet til å velge en fornuftig gaussflate.
(Sammenlign svaret med det du fant i oppgave 3d i øving 2.)

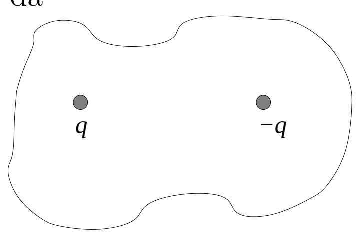
Oppgave 3 (multiple choice)

a) På en lukket flate er det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ overalt rettet *innover*. Da kan vi fastslå at

A flatenormalen $\hat{n}$ over hele flaten er parallell med $\boldsymbol{E}$
B flaten omslutter null netto ladning
C flaten omslutter en netto negativ ladning
D flaten omslutter en netto positiv ladning

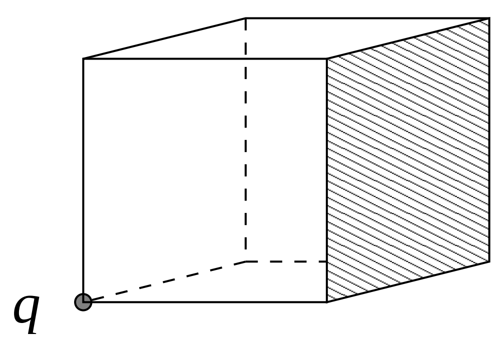
b) Figuren illustrerer en lukket flate som omslutter to punktladninger q og $-q$. Netto elektrisk fluks ut gjennom denne flaten er da

A null
B $-q/\varepsilon_0$
C q/ε_0
D $2q/\varepsilon_0$



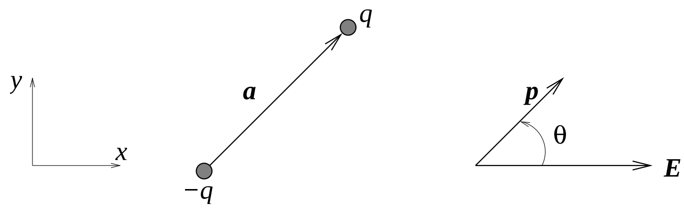
c) En punktladning q er plassert i det ene hjørnet av en kube. Hva blir den elektriske fluksen gjennom den skraverte sideflaten i figuren til høyre? (Tips: Utnytt symmetrien i problemet.)

A q/ε_0
B $q/4\varepsilon_0$
C $q/8\varepsilon_0$
D $q/24\varepsilon_0$



Oppgave 4 (≃ oppgave 3, kontinuasjonseksamen 15. august 2003)

En elektrisk dipol består av to punktladninger q og $-q$ med en (fast) innbyrdes avstand a. Dipolen er plassert i et homogent "ytre" elektrostatisk felt $\boldsymbol{E} = E\hat{x}$. Anta at dipolen ligger i xy-planet og slik at vektoren $\boldsymbol{a}$ fra $-q$ til q, og dermed også dipolmomentet $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$, danner en vinkel θ med $\boldsymbol{E}$. Vinkelen θ regnes *mot urviseren* i forhold til x-aksen, som vist i figuren.



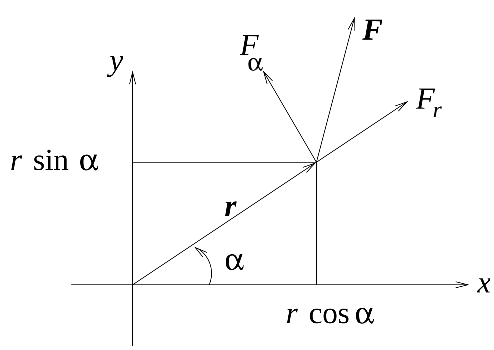
a) Hva blir den totale kraften (fra det ytre feltet $\boldsymbol{E}$) på dipolen?

b) Fra mekanikken har vi at *dreiemomentet* $\boldsymbol{\tau}$ omkring en bestemt akse er definert som $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$, der $\boldsymbol{r}_i$ er "armen" fra aksen og ut til posisjonen der kraften $\boldsymbol{F}_i$ angriper. (Det står litt om kryssprodukt mellom vektorer helt til slutt i denne oppgaven.)
Vis at for den elektriske dipolen i det homogene feltet blir dreiemomentet omkring aksen som går normalt gjennom dipolens midtpunkt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p} = -pE\sin\theta\;\hat{z}$$

c) Til slutt skal du finne et uttrykk for den potensielle energien $U(\theta)$ til den elektriske dipolen ovenfor. Skisser også $U(\theta)$. Hvilken orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{E}$ representerer en stabil likevekt?

Til hjelp på punkt c):
La oss for enkelhets skyld holde oss i xy-planet. En kraft $\boldsymbol{F} = F_x\,\hat{x} + F_y\,\hat{y} = F_r\,\hat{r} + F_\alpha\,\hat{\alpha}$ som angriper i en posisjon $\boldsymbol{r} = r\cos\alpha\;\hat{x} + r\sin\alpha\;\hat{y}$ vil da gi et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ omkring z-aksen:



Vi vet dessuten at kraften $\boldsymbol{F}$ kan "avledes' fra den potensielle energien U ved hjelp av gradientoperatoren: $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. I polarkoordinater (r, α) har vi

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Da kan det vises at

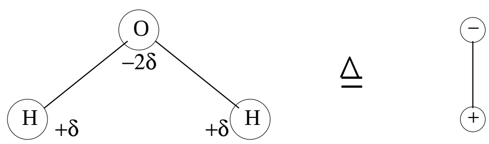
$$\tau = -\frac{\partial U}{\partial \alpha},$$

og dermed er

$$dU = -\tau \, d\alpha$$

ettersom U ikke avhenger av r i vårt tilfelle. (Vi har fast $r = a/2$ for dipolen.)

Kommentar: En elektrisk isolator, et såkalt *dielektrikum*, består typisk av molekyler med null nettoladning, men med en intern ladningsfordeling (dvs plassering av atomkjerner og elektroner) som er "skjev". Sagt på en annen måte: "Ladningsmiddelpunktet" for molekylets positive ladning (dvs atomkjernene) er ikke i samme posisjon som ladningsmiddelpunktet for molekylets negative ladning (dvs elektronene). Slike *polare* molekyler kan betraktes som elektriske dipoler. (Vel, de *er* elektriske dipoler.) Eksempel: Vann, H_2O.

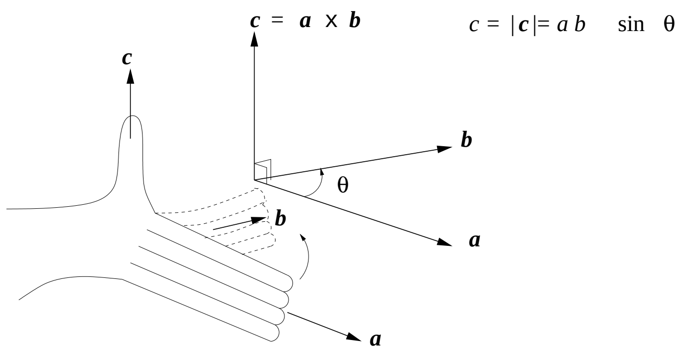


Siden oksygen er mer elektronegativt (dvs, det har større lyst på ekstra elektroner) enn hydrogen, vil elektronfordelingen være noe forskjøvet i retning oksygenatomet i et vannmolekyl. Det betyr at i nærheten av O-atomet har vi et lite overskudd av negativ ladning, f.eks. -2δ. På grunn av elektrisk nøytralitet totalt sett (og pga symmetrien i vannmolekylet), må vi da ha et lite overskudd, $+\delta$, av positiv ladning i nærheten av hvert H-atom.
Et dielektrikum kan også bestå av atomer eller molekyler *uten* en slik polar ladningsfordeling, dvs med elektrisk dipolmoment $p = 0$. Men dersom et slik materiale plasseres i et ytre elektrisk felt, vil atomenes elektroner og kjerner trekkes i hver sin retning, slik at det *induseres* et elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}_{\text{ind}}$ med retning langs $\boldsymbol{E}$. *Størrelsen* på slike induserte dipolmoment er typisk liten i forhold til *permanente* dipolmoment (som i vann), men *kvalitativt* blir oppførselen den samme.
Dermed: Har du forstått denne oppgaven, har du essensielt forstått hvordan et dielektrikum påvirkes av et ytre elektrisk felt.

Kryssprodukt mellom vektorer

Kryssproduktet mellom to vektorer er en tredje vektor med retning normalt på begge de to første, og med absoluttverdi lik produktet av absoluttverdien av de to første multiplisert med sinus til vinkelen mellom disse.

Fortegnet på vinkelen mellom de to vektorene regnes som positivt når vi går *fra* den første vektoren *til* den andre. Denne fortegnskonvensjonen er det samme som det dere kanskje kjenner som høyrehåndsregelen:



La høyre hånds fire fingre (unntatt tommelen) peke langs den første vektoren. Bøy dem deretter slik at de peker langs den andre vektoren. (Vi bøyer fingrene den retningen som gir en vinkel mindre enn 180 grader.) Tommelen peker nå i kryssproduktets retning. Altså:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

har absoluttverdi

$$c = |\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\theta = a \cdot b \cdot \sin\theta$$

Eksempel 1: $\boldsymbol{a} = 10\,\hat{x}$ og $\boldsymbol{b} = 5\,\hat{y}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 50\,\hat{z}$$

Eksempel 2: $\boldsymbol{a} = 5\,\hat{y}$ og $\boldsymbol{b} = 10\,\hat{x}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -50\,\hat{z}$$

Av dette ser vi at

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

Eksempel 3: $\boldsymbol{a} = 2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}$ og $\boldsymbol{b} = 5\,\hat{x} + 2\,\hat{y}$ gir

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 2 \cdot 2\,\hat{z} + 3 \cdot 5\,\hat{z} = 19\,\hat{z}$$

I disse eksemplene har vi brukt at

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} &= 0 \\ \hat{y} \times \hat{y} &= 0 \\ \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{x} &= -\hat{z} \end{aligned}$$