

## Litt om rekkeutviklinger og tilnærmede uttrykk for funksjoner

Den såkalte Taylorrekken for en funksjon  $f(x)$  i nærheten av et punkt  $a$  er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

Altså et polynom i  $(x - a)$ , der summen fortsetter i det uendelige. Her betyr  $f'(a)$  den deriverte av funksjonen  $f$  med hensyn på  $x$ , evaluert i  $x = a$ ,  $f^{(n)}(a)$  betyr den  $n$ -te deriverte, og  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . En forutsetning er selvsagt at alle de deriverte eksisterer i  $x = a$ . Dessuten må leddene i summen etterhvert bli mindre og mindre, på en slik måte at vi får en bedre og bedre tilnærming til den eksakte verdien  $f(x)$  jo flere ledd vi tar med i summen. Vi ser at vi kan skrive Taylorrekken slik:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Spesialtilfellet  $a = 0$  kalles gjerne Maclaurinrekken til  $f$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Grunnen til at flere og flere ledd i nettopp en slik sum gir en stadig bedre tilnærming til  $f(x)$  er som følger:

- Ett ledd i summen gir  $p_0(x) = f(0)$ . Vi har et polynom  $p_0(x)$  med riktig verdi i  $x = 0$ , men heller ikke mer.
- To ledd gir  $p_1(x) = f(0) + f'(0)x$ . Vi har et polynom  $p_1$  med riktig verdi i  $x = 0$  og i tillegg riktig helning i  $x = 0$ :  $p_1'(0) = f'(0)$ .
- Tre ledd gir  $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$ . Vi har et polynom  $p_2(x)$  med riktig verdi  $f(0)$ , riktig helning  $f'(0)$  og riktig krumning i  $x = 0$ :  $p_2''(0) = f''(0)$ .
- $n + 1$  ledd gir polynomet  $p_n(x)$ . Nå er  $p_n(0) = f(0)$ ,  $p_n'(0) = f'(0)$ ,  $\dots$ ,  $p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$ . Altså et polynom med alle de første  $n$  deriverte med riktig verdi i  $x = 0$ .

La oss se på et eksempel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Vi ser umiddelbart at  $f(0) = 1$  og at funksjonen avtar mot null for økende verdier av  $x$ . Men *hvordan* avhenger funksjonen av  $x$ , for eksempel i nærheten av  $x = 0$ ? Dette kan vi besvare ved

å se på rekkeutviklingen av  $f(x)$  (Maclaurinrekken, dvs omkring punktet  $x = 0$ ). Det eneste vi må kunne er å derivere:

$$\begin{aligned} f'(0) &= [(1+x)^{-1/2}]'_{x=0} = [-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}]_{x=0} = -\frac{1}{2} \\ f''(0) &= [(1+x)^{-1/2}]''_{x=0} = [(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-5/2}]_{x=0} = \frac{3}{4} \\ &\dots \end{aligned}$$

Dermed kan vi altså tilnærme  $f(x)$  med polynomet

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

Hvor mange ledd skal vi ta med i summen? Vel, det avhenger av hva vi er ute etter. La oss si at vi ønsket en tilnærmet verdi av  $f(0.1)$  som ikke skilte seg fra den eksakte verdien med mer enn 0.001. Siden leddene i rekkeutviklingen hele tiden skifter fortegn, innser vi vel at dette oppnås ved å ta med så mange ledd at det *neste* leddet i rekken (dvs det første leddet som vi ikke tar med) er mindre enn 0.001 (i absoluttverdi). Med  $x = 0.1$  blir jo leddene mindre og mindre i absoluttverdi, så med økende antall ledd i rekkeutviklingen “pendler” vi fram og tilbake omkring den eksakte verdien av  $f(0.1)$ , med stadig mindre feil. I vårt tilfelle har 2.ordensleddet verdien  $3 \cdot 0.1^2/8 = 3/800 = 3.75/1000 = 0.00375$  når  $x = 0.1$ . Vi regner ut det neste leddet for å sjekke at det er mindre enn 0.001:

$$|\frac{1}{3!}f'''(0)x^3|_{x=0.1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{8} \cdot 0.1^3 = \frac{15}{48000} = 0.0003125 < 0.001$$

Følgelig er det tilstrekkelig å ta med tre ledd for å bestemme  $f(0.1)$  med den ønskede nøyaktighet:

$$f(0.1) \simeq 1 - 0.05 + 0.00375 = 0.95375 \simeq 0.954$$

På min kalkulator får jeg det riktige svaret med 9 desimalers nøyaktighet:

$$f(0.1) = 0.953462589$$

Dette ble jo nærmest numerisk analyse, og det er forsåvidt ikke så dumt å kunne litt om det. Vi er imidlertid som regel kun ute etter svar på spørsmålet “hvordan avhenger  $f$  av  $x$  til ledende orden i ulike grensetilfeller”, for eksempel “små”  $x$  ( $x \ll 1$ ). Det innebærer som regel å finne det første leddet i en slik rekkeutvikling. Med andre ord, det leddet som “overlever” (lengst) når vi tar grensen  $x \rightarrow 0$ .

Går vi tilbake til eksempelet over, vil “laveste ordens tilnærming” (her: nullte orden i  $x$ ) av funksjonen  $1/\sqrt{1+x}$  være lik 1 dersom  $x \ll 1$ . Vi må gå til nest laveste ordens tilnærming for å finne ut hvordan  $f(x)$  avhenger av  $x$  i nærheten av  $x = 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \frac{x}{2} \quad \text{for } x \ll 1$$

Hva med den andre grensen, “store” verdier av  $x$ , dvs  $x \gg 1$ ? Vel, lar vi  $x$  gå mot uendelig, går selvsagt  $1/\sqrt{1+x}$  mot 0. Greit nok. Men *hvordan* går  $f$  mot null når  $x$  vokser? I første

omgang trenger vi ingen rekkeutvikling for å svare på det: Dersom  $x \gg 1$ , kan vi neglisjere 1 i forhold til  $x$ , dvs vi kan sette  $1 + x \simeq x$ , slik at

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{for } x \gg 1$$

Legg merke til at “ledende oppførsel” av  $f(x)$  i dette tilfellet ikke kunne uttrykkes ved  $x$  opphøyd i noen heltallig potens, men derimot som  $x$  opphøyd i  $-1/2$ .

Nå kunne det jo tenkes at vi var interessert i *korreksjoner* til en slik ledende oppførsel for store verdier av  $x$ . Kan vi finne en rekkeutvikling av funksjonen  $f(x)$  der leddene blir mindre og mindre når  $x \gg 1$ ? Svaret er ja. Vi må imidlertid ha en “liten” parameter, og dette kan åpenbart ikke være  $x$ . Men  $1/x$  blir jo liten dersom  $x$  blir stor! La oss derfor skrive om  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x}}$$

Her kan vi rekkeutvikle den siste brøken, og for å få med “ledende korreksjon” til resultatet  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  må vi ta med to ledd:

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/x}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{for } x \gg 1$$

Dermed har vi

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{3/2}} \quad \text{for } x \gg 1$$

I Øving 2 beregner vi det elektriske feltet på symmetriaksen til en uniformt ladet skive:

$$E(a) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \right)$$

I oppgave c er spørsmålet hvordan  $E(a)$  oppfører seg “til ledende orden” for  $a \gg R_0$ .

Vi ser vel med en gang at vi ikke bare kan neglisjere  $R_0^2$  i forhold til  $a^2$ , for det gir  $E = 0$ . For å finne ledende oppførsel av  $E(a)$ , må vi rekkeutvikle brøken med kvadratrotten. Vi skriver

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}}$$

Med andre ord, vår lille, dimensjonsløse parameter er  $R_0^2/a^2$ . Vi må ta med to ledd i rekkeutviklingen:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}} \simeq 1 - \frac{R_0^2}{2a^2}$$

Dermed blir det elektriske feltet langt unna skiva:

$$E(a) \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - 1 + \frac{R_0^2}{2a^2} \right) = \frac{\sigma R_0^2}{4\varepsilon_0 a^2}$$

Og det ser jo riktig bra ut, ettersom skivas totale ladning er  $Q = \sigma\pi R_0^2$  og feltet i avstand  $a$  fra en punktladning  $Q$  er  $Q/4\pi\varepsilon_0 a^2$ .