Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008, uke18

Tirsdag 29. april

Energi i magnetfelt

[FGT 32.2, 32.3; YF 30.3; TM 28.7; AF 26.8, 27.11; LHL 25.3; DJG 7.2.4]

La oss regne ut hvor mye energi som må tilføres en spole med induktans L når vi øker strømmen gjennom spoletråden fra $i = 0$ til en "sluttverdi" $i = I$.
Tilført energi ved å øke strømmen fra i til $i + di$:

$$dU_B = P\ dt = iv\ dt = iL\frac{di}{dt}dt = Li\ di$$

Her er $P = iv$ tilført effekt, og $v = Ldi/dt$ spenningen over spolen idet vi endrer strømmen fra i til $i + di$.
Dermed blir total energi tilført for å øke strømmen fra 0 til I lik

$$U_B = \int dU_B = L\int_0^I i\ di = \frac{1}{2}LI^2$$

Denne energien kan vi nå assosiere med magnetfeltet B inne i spolen. Anta at spolen er tilnærmet uendelig lang, med N viklinger på hele lengden l. Tverrsnittet av spolen har areal A. Da er magnetfeltet inne i spolen

$$B = \mu_0 nI = \mu_0\frac{N}{l}I$$

(På utsiden av spolen er magnetfeltet null.) Total magnetisk fluks gjennom de N viklingene på spolen blir

$$\phi_m = NAB = NA\mu_0\frac{N}{l}I$$

som også kan skrives på formen

$$\phi_m = LI$$

der L er spolens (selv-)induktans. Med dette kan vi omforme uttrykket for energien U_B:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{NAB}{I}I^2 = \frac{1}{2}NAB\cdot\frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot Al$$

Her er Al lik volumet inne i spolen, så vi ser at vi har en *energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) assosiert med magnetfeltet B:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Fra før har vi funnet at vi har en energitetthet u_E assosiert med et elektrisk felt E:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dermed blir *total energitetthet i et elektromagnetisk felt*:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Kommentar: Dette uttrykket er "alltid riktig", i den forstand at u representerer energien "lagret" i feltene E og B. I litteraturen "risikerer" du å støte på formelen

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

for total energitetthet dersom vi har polariserbare og/eller magnetiserbare medier tilstede. (I den siste overgangen her brukte vi at $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, med ε = mediets permittivitet og μ = mediets permeabilitet.)
Disse to uttrykkene for u er ikke identiske, og kan derfor ikke representere den samme energitettheten. Det siste uttrykket for u inkluderer da også et bidrag som ikke er direkte "lagret" i feltene, nemlig den "elastiske" energien knyttet til polarisering og magnetisering, dvs innrettingen av elektriske og magnetiske dipoler.
I den grad noe av dette blir aktuelt til eksamen, skal vi kun bry oss om *feltenergien* gitt ved

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Koblede systemer, selvinduktans og gjensidig induktans

Anta at vi har to kretser, nr 1 og nr 2, med selvinduktans hhv L_1 og L_2 og gjensidig induktans M. Anta f.eks. at vi i krets nr 1 har en tidsavhengig spenningskilde $\mathcal{E}_1(t)$. Den samlede resistansen i de to kretsene er hhv R_1 og R_2.
Vi skal bestemme de resulterende strømstyrkene I_1 og I_2 i de to kretsene. Kirchhoffs spenningsregel gir da følgende ligninger:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - L_1\dot{I}_1 - R_1 I_1 - M\dot{I}_2 &= 0 \\ -L_2\dot{I}_2 - R_2 I_2 - M\dot{I}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dette er to koblede differensialligninger for de to ukjente, $I_1(t)$ og $I_2(t)$. Hvis $\mathcal{E}_1$ er en harmonisk vekselspenningskilde,

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t,$$

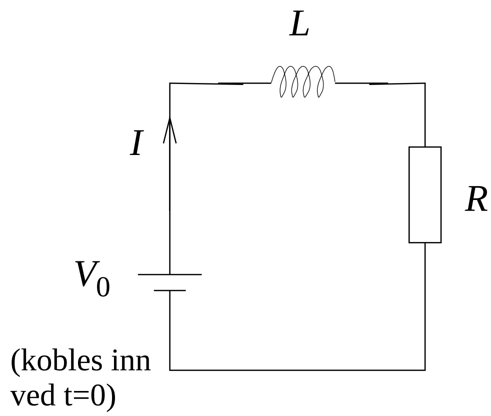
med amplitude $\mathcal{E}_0$ og vinkelfrekvens ω, vil også strømmene I_1 og I_2 variere harmonisk med tiden, med samme vinkelfrekvens ω. Dermed kan vi generelt skrive

$$\begin{aligned} I_1(t) &= A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t \\ I_2(t) &= A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t \end{aligned}$$

og innsetting av disse uttrykkene i de to differensialligningene gir da i alt fire ligninger, for fastleggelse av "koeffisientene" A_1, A_2, B_1, B_2. (Fire ligninger fordi vi kan sammenligne $\cos\omega t$-ledd og $\sin\omega t$-ledd hver for seg, slik som i AC-eksemplet nedenfor.)

RL-krets med likespenningskilde V_0
[FGT 32.4; YF 30.4; TM 28.8; AF Ex 27.5; LHL 25.2; DJG Ex 7.12]

Ser på seriekobling av *induktans* L (f.eks. en spole) og *resistans* R. Et batteri med likespenning V_0 kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$.



Total ems i kretsen er da

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

der det siste leddet er indusert "motspenning" over induktansen når vi prøver å *endre* strømstyrken gjennom den.
Ifølge Kirchhoffs spenningsregel (evt "sløyferegel") må denne totale emsen i sløyfa tilsvare spenningsfallet over motstanden R, med andre ord

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

eller

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Dette er nøyaktig samme type 1. ordens differensialligning for strømmen I som det vi hadde for kondensatorladningen Q da vi studerte opplading av kondensator i en RC-krets. Løsningen blir

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

der vi har brukt initialbetingelsen $I(0) = 0$. (Før innkobling av batteriet er åpenbart $I = 0$. I tidspunktet $t = 0$ kan *ikke* strømmen i kretsen "hoppe" opp til en endelig verdi forskjellig fra null. Det måtte i såfall innebære at $dI/dt \to \infty$ i $t = 0$, hvilket igjen ville innebære en uendelig stor motspenning over induktansen. Det er rett og slett ikke fysisk mulig! Altså må I være kontinuerlig i $t = 0$, og vi kan sette $I(0) = 0$.)

Tidskonstant for endring av strømmen:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Verdien av τ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å øke strømmen i en slik RL-krets fra 0 til maksimal verdi V_0/R:

$$I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R}$$

RL-krets med vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$
[FGT 33.2; YF 31.2; TM 29.2, 29.3; AF Note 27.2; LHL 27.3]

Med en vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en induktans L har vi med bruk av Kirchhoffs spenningsregel:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t + V_L &= 0 \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI}{dt} \\ I(t) &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Vi kan skrive strømmen $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

(jfr tidligere i kurset, og tilsvarende for kapasitans C og RC-kretser), og ser at strømamplituden er

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

mens fasevinkelen er

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Dvs, strøm I og påtrykt spenning $V = V_0 \cos \omega t$ er faseforskjøvet med en kvart periode i forhold til hverandre. I forbindelse med RC-kretser og vekselspenningskilde innførte vi størrelsen *impedans* Z, definert ved

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

Med andre ord, en slags generalisert motstand, jfr Ohms lov $R = V/I$. Vi ser da at impedansen til en induktans L blir

$$Z_L = \omega L$$

med fasevinkel

$$\alpha_L = \pi/2$$

Et eksempel til: Vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en induktans L.
Da må den totale strømmen I som "leveres" av spenningskilden fordele seg på en strøm I_R gjennom motstanden og en strøm I_L gjennom induktansen:

$$I = I_R + I_L$$

(Dvs: Kirchhoffs strømregel.) Videre må vi gjenfinne den påtrykte spenningen som et tilsvarende spenningsfall, både over motstanden og over induktansen. Med andre ord:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= R I_R \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

(Dvs: Kirchhoffs spenningsregel.) Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} \cos \omega t \\ I_L &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t$$

Vi kan skrive denne summen av to ledd på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

ved å bruke den trigonometriske relasjonen

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Dermed:

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

Sammenligning med uttrykket for $I(t) = I_R + I_L$ gir oss følgende to ligninger for de to ukjente størrelsene I_0 og α:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{R} &= I_0 \cos \alpha \\ \frac{V_0}{\omega L} &= I_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Dette ligningssettet har løsning

$$\tan \alpha = \frac{R}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

og

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)^{1/2}$$

Fra definisjonen av impedans, $Z = V_0/I_0$, ser vi at impedansen til en parallellkobling er

$$Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-1/2}$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er liten, dvs $\omega \ll R/L$, vil leddet $1/\omega^2 L^2$ dominere i forhold til $1/R^2$, slik at

$$Z \simeq \omega L$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er stor, dvs $\omega \gg R/L$, vil leddet $1/R^2$ dominere i forhold til $1/\omega^2 L^2$, slik at

$$Z \simeq R$$