Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008, uke 4

Tirsdag 22.01.08

Elektrisk potensial
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.1; AF 21.9; LHL 19.9; DJG 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1]

Vi har en *konservativ* kraft $\boldsymbol{F}$ dersom arbeidet $\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ er uavhengig av veien mellom startposisjonen A og sluttposisjonen B.
Eksempler på konservative krefter: Gravitasjonskraften mellom to masser. Den elektrostatiske kraften mellom to ladninger.
Eksempel på ikke-konservativ kraft: Friksjon.

Mer generelt har vi et *konservativt vektorfelt* $\boldsymbol{G}$ dersom *veiintegralet* $\int_A^B \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$ er uavhengig av integrasjonsveien mellom A og B.

For et konservativt vektorfelt $\boldsymbol{G}$ gjelder:

$$\oint \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

der $\oint$ angir integral rundt *lukket kurve* i rommet.

For konservativ kraft $\boldsymbol{F}$ har vi en *potensiell energi* U slik at arbeidet utført av $\boldsymbol{F}$ på "systemet" (f.eks. ladningen som flyttes) ved en forflytning fra A til B tilsvarer *endringen* i systemets potensielle energi:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

[Fortegnssjekk: Forflytning av masse m oppover, dvs *mot* tyngdekraften $m\boldsymbol{g}$, gir økt potensiell energi og samtidig er $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} < 0$, altså er fortegnet OK!]

På samme måte som at det var hensiktsmessig å innføre elektrisk felt $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$ = elektrisk kraft pr ladningsenhet, er det nå hensiktsmessig å innføre *elektrisk potensial* som *potensiell energi pr ladningsenhet*:

$$V = U/q$$

Enhet for elektrisk potensial: $[V] = [U/q] = \text{J/C} \equiv \text{V}$ (volt)

Energienheten elektronvolt: 1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J = energiforskjellen til en elementærladning når den flyttes mellom to posisjoner med en potensialforskjell på 1 volt.

Sammenhengen mellom elektrisk potensial V og elektrisk felt $\boldsymbol{E}$
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.1; AF 21.10; LHL 19.9; DJG 2.3.1]

En ladning q som påvirkes av en elektrostatisk kraft $\boldsymbol{F}$ har en forskjell i potensiell energi

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

mellom punktene A og B. Da må den *elektriske potensialforskjellen* ΔV mellom punktene A og B være

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}}{q} = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Alternativ enhet for elektrisk felt: $[E] = [V/l] = \mathrm{V/m}$

Merk deg at mens elektrisk felt er en *vektorstørrelse*, så er elektrisk potensial en *skalar størrelse*.

Merk: Bare *forskjeller* i elektrisk potensial (og potensiell energi) har fysisk betydning. Kan fritt velge nullpunkt for potensialet. Vanlig valg: $V(r \to \infty) = 0$. Dermed, for punkt P:

$$V_P = -\int_\infty^P \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

(Vi kan ikke alltid velge $V(r \to \infty) = 0$. Det skal vi se eksempler på etterhvert.)

Elektrisk potensial fra punktladning (Coulombpotensialet)
[FGT 24.2; YF 23.2; TM 23.2; AF 21.11; LHL 19.9; DJG 2.3.4]:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Elektrisk potensial (i et punkt P) fra flere punktladninger:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Her er r_i avstanden fra ladning nr i til punktet P. Det følger med andre ord at superposisjonsprinsippet også gjelder for potensialet V, ettersom det gjelder for feltet $\boldsymbol{E}$ (og krafta $\boldsymbol{F}$).

Dersom vi har en kontinuerlig ladningsfordeling, kan vi gå fram på nøyaktig samme vis som vi gjorde i forbindelse med elektrisk felt: Del opp området med ladning i små biter slik at bit nr i har en liten ladning Δq_i som kan betraktes som en punktladning. I grensen $\Delta q_i \to 0$ kan vi erstatte summen over i med et integral:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

med

$$dq = \begin{cases} \rho(x,y,z)\, dV & (3D) \\ \sigma(x,y)\, dA & (2D) \\ \lambda(x)\, dx & (1D) \end{cases}$$

Onsdag 23.01.08

Potensiell energi for system med flere ladninger
[FGT 24.1, 24.2; YF 23.1; TM 24.1; AF 21.9, 21.12; LHL 19.9,20.3; DJG 2.4]

- mellom to punktladninger i innbyrdes avstand r_{12}: $U_{12} = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r_{12}$
- mellom flere punktladninger: $U = \sum_{i<j} U_{ij}$ (der summen over i og j går over alle punktladningene i systemet, dog slik at j hele tiden er større enn i, dvs summen går over alle par av punktladninger)

Energibevarelse for ladete partikler i elektrisk felt
[FGT 24.1; YF 23.1; AF 21.12; LHL 19.9]

Med *konservative* krefter er *total energi bevart*:

$$\begin{aligned} T + U &= \text{konstant} \\ T &= \frac{1}{2}mv^2 = \text{kinetisk energi} \\ U &= qV = \text{potensiell energi} \end{aligned}$$

Dersom partikkel med ladning q og masse m akselereres i elektrisk felt $\boldsymbol{E}$, dvs gjennom potensialforskjell $\Delta V = V_2 - V_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 \\ \Rightarrow v_2^2 &= v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2) \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 - \frac{2q\Delta V}{m}} = v_1\sqrt{1 - \frac{2q\Delta V}{mv_1^2}} \end{aligned}$$

Her er v_1 partikkelens hastighet der potensialet er V_1 ("startpunkt") og v_2 er partikkelens hastighet der potensialet er V_2 ("sluttpunkt").
Dersom $q\Delta V < 0$ fås $v_2 > v_1$, dvs (positiv) akselerasjon.
Altså:
Negativ ladning akselereres i retning høyere potensial
Positiv ladning akselereres i retning lavere potensial
.... mens begge typer ladning selvsagt akselereres i retning lavere potensiell energi.

Bevegelsen til en partikkel med masse m og ladning q i et elektrisk felt er bestemt av Newtons 2. lov (= *bevegelsesligningen*):

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}$$

Dermed:

$$\boldsymbol{a} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}$$

Partikkel med positiv ladning akselereres langs $\boldsymbol{E}$.
Partikkel med negativ ladning akselereres langs $-\boldsymbol{E}$.