Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2008, uke 5

Tirsdag 29.01.08

Beregning av $\boldsymbol{E}$ fra V
[FGT 24.4; YF 23.5; TM 23.3; AF 21.10; LHL 19.9; DJG 2.3.1, 1.2.2]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Gradientoperatoren ∇:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \;\; \text{(kartesiske koordinater)} \\ &= \frac{\partial V}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \;\; \text{(sylinderkoordinater)} \\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \;\; \text{(kulekoordinater)}\end{aligned}$$

Det er ikke et krav at du skal gå rundt og huske på hvordan gradientoperatoren ser ut i sylinder- og kulekoordinater. Den vil bli oppgitt dersom det f.eks. skulle bli bruk for den til eksamen. På den annen side: I hver eneste komponent gjenkjenner vi nevneren som den aktuelle komponenten av den aktuelle forflytningsvektoren $d\boldsymbol{l}$, med dx erstattet av ∂x osv. Eksempel: I sylinderkoordinater har vi

$$d\boldsymbol{l} = ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z},$$

og ϕ-komponenten av ∇V blir da

$$\frac{\partial V}{s\,\partial\phi}$$

Hvis vi for eksempel har kulesymmetri (dvs $\boldsymbol{E}$ og V kun avhengig av r, ikke av vinklene θ og ϕ):

$$\boldsymbol{E} = E(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

Betydning av gradientoperatoren

Vektoren ∇V peker i den retningen som V øker raskest, dvs i den retningen der den *retningsderiverte* til V er størst. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at det elektriske feltet peker i den retningen som V *avtar* raskest.
Eksempel: Dersom en punktladning q plasseres et sted der $\nabla V = 0$, blir den ikke utsatt for noen elektrisk kraft, for da er $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla V = 0$.

Ekvipotensialflater
[FGT 24.3; YF 23.4; TM 23.5; AF 21.11; LHL 19.11; DJG 2.3.2]

Ekvipotensialflater er flater i rommet med konstant potensial.

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

for *vilkårlig* integrasjonsvei på en ekvipotensialflate.
Dermed:

$$\boldsymbol{E} \perp \quad \text{ekvipotensialflate}$$

Oppsummering til nå, og møte med Maxwell-ligning nr 1

Coulombs lov (empirisk lov for kraft mellom to ladninger q og q' i innbyrdes avstand r):

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Elektrisk felt fra punktladning q (følger av definisjonen "kraft pr ladningsenhet"):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Konservativ kraft:

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, dvs veien mellom punktene A og B. Dermed:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

(dvs når vi integrerer rundt en *lukket* kurve)

Med definisjonen av $\boldsymbol{E}$ følger det da at det elektrostatiske feltet også er konservativt, dvs:

$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, og dermed

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Dette er en av *Maxwells ligninger* (vel å merke, for statiske felt, dvs felt som ikke endrer seg med tiden).
Et konservativt vektorfelt kan alltid avledes fra et skalart *potensial*:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Potensialforskjellen mellom to punkter A og B kan beregnes dersom vi kjenner det elektriske feltet i området mellom A og B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Superposisjonsprinsippet gjelder for elektrisk kraft $\boldsymbol{F}$ (eksperimentelt resultat):

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

= kraft på ladning q_i fra ladninger q_j $(j = 1, 2, \ldots n)$
Da følger det at superposisjonsprinsippet også gjelder for elektrisk felt $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j$$

og for elektrisk potensial V,

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

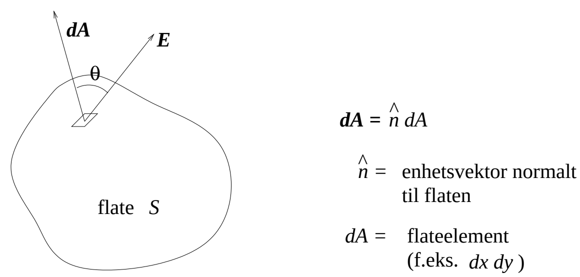
Her er $\boldsymbol{E}_j$ og V_j bidrag til henholdsvis felt og potensial fra ladning nummer j.

Onsdag 30.01.08

Elektrisk fluks
[FGT 23.1; YF 22.1, 22.2; TM 22.2; AF 25.3; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Noen ganger skriver vi ϕ_E for å presisere at det er snakk om *elektrisk* fluks. Vi har tidligere definert elektriske feltlinjer slik at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ skulle være proporsjonal med tettheten av feltlinjer, eller antall feltlinjer pr flateenhet. Av ovenstående definisjon av elektrisk fluks ϕ kan vi da slutte at ϕ representerer antall feltlinjer som krysser flaten S.
Følgende figur illustrerer hva dette går ut på:



Flaten S er en vilkårlig "tenkt" eller "valgt" flate i rommet. Det elektriske feltet "eksisterer" i området der flaten S er "plassert". ($\boldsymbol{E}$ kan være null eller forskjellig fra null.) Flaten S tenkes så delt inn i små flateelementer $d\boldsymbol{A} = \hat{n} dA$, med areal dA og orientering i rommet spesifisert ved *flatenormalen* $\hat{n}$. Fluksen $d\phi$ gjennom flaten dA er da lik $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$. Den totale fluksen gjennom hele flaten S får vi ved å integrere opp bidragene $d\phi$, altså ligningen over.

Merk at fluksen er en *skalar* størrelse. Den kan imidlertid være positiv eller negativ, avhengig av om vinkelen mellom vektorene $\boldsymbol{E}$ og $d\boldsymbol{A}$ er mindre eller større enn 90 grader.

En *lukket flate* S er en flate som omslutter et veldefinert volum V, f.eks. et kuleskall, et peanøttskall e.l. Den elektriske fluksen gjennom en lukket flate skriver vi slik (jfr. notasjonen for veiintegral rundt lukket kurve):

$$\phi_c = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Indeksen c står for "closed". Den er forsåvidt unødvendig så lenge vi skriver ned integralet. Ringen på integrasjonssymbolet er tilstrekkelig for å understreke at det er snakk om en lukket flate.
Med en lukket flate kan vi gjøre unna "fortegnsproblemet" en gang for alle: Vi velger *positiv* retning på $d\boldsymbol{A}$ *ut av* flaten.
Dermed kan vi konkludere med at

$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{fluks ut gjennom flaten}$$
$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{fluks inn gjennom flaten}$$

Dessuten:

$$\phi_c > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{netto fluks ut gjennom flaten}$$
$$\phi_c < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{netto fluks inn gjennom flaten}$$

For en *ikke lukket* flate S har vi ingen tilsvarende mulighet for å velge positiv retning på $d\boldsymbol{A}$. Flaten har to sider, og ingen av disse kan sies å være mer "inne" eller "ute" i forhold til den andre. I enkelte tilfeller velger vi imidlertid en positiv retning på (den lukkede!) kurven (linjen) som går rundt kanten av S. Da definerer vi positiv retning på $d\boldsymbol{A}$ ved hjelp av *høyrehåndsregelen*: La høyrehåndas fire øvrige fingre peke i positiv retning for flatens omsluttende kurve. Da peker tommelen i positiv retning for $d\boldsymbol{A}$.

Gauss' lov
[FGT 23.2; YF 22.3; TM 22.2, 22.6; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

Gauss' lov (på såkalt integralform; senere i kurset, hvis vi får tid, skal vi se at vi også har en versjon av Gauss' lov på såkalt differensialform):

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

Her er integralet på venstre side av ligningen et *flateintegral* over en *lukket* flate S, mens q_{in} er total (netto) ladning innenfor den lukkede flaten ("gaussflaten").
Gauss' lov er en av *Maxwells ligninger*. (Vi konsentrerer oss fremdeles om *elektrostatikk* en god stund framover, men faktisk er det slik at Gauss' lov også gjelder selv om $\boldsymbol{E}$ skulle finne på å variere med tiden.)
Innholdet i ligningen kan formuleres slik: Netto antall feltlinjer ut av et volum, dvs ut gjennom den lukkede flaten som avgrenser dette volumet, er bestemt av, og direkte proporsjonal med netto ladning inne i volumet, dvs innenfor den lukkede flaten.
Gauss' lov følger direkte av Coulombs lov (og representerer dermed egentlig ingen ny fysikk).

I neste uke skal vi bevise Gauss' lov og se på et par eksempler på hva vi kan bruke Gauss' lov til. Deretter skal vi se litt på ulike materialers elektriske egenskaper.