NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen: Jon Andreas Støvneng, telefon: 45 45 55 33 / 73 59 36 63

EKSAMEN I TFY4155 ELEKTROMAGNETISME OG FY1003 ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Mandag 31. mai 2010 kl. 0900 - 1300

Bokmål

Tillatte hjelpemidler (kode C):

- Bestemt enkel godkjent kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave).
- C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Vedlagt formelark (side 8).

Sensurdato: Innen 21. juni 2010.

Prosenttallene i parentes gitt ved hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen. I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.
Noen generelle merknader:
- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. m for masse), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. m for meter)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E (stor bokstav) eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål i Oppgave 1 skriver du på første innleveringsark i en tabell lignende dette:
(Alternativt kan du fylle ut denne tabellen og levere inn dette arket. Skriv i såfall kandidatnr øverst på arket. Baksiden på dette arket er blankt.)

Spørsmål:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Mitt svar:												

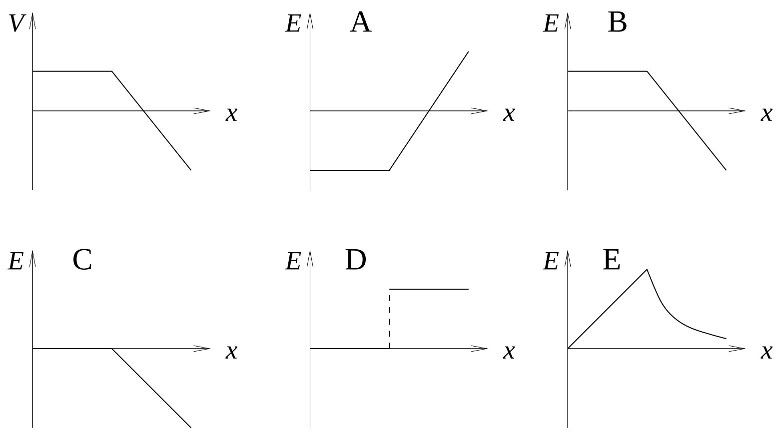
Oppgave 1. (Tolv flervalgsspørsmål. Vekt: teller 30 %)

a. Den potensielle energien til et elektron og et proton i innbyrdes avstand 1.6 nm er

A -0.9 J B 900 MeV C -14.4 J D -0.9 eV E 14.4 kJ

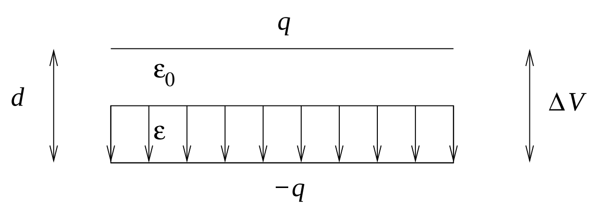
(Null potensiell energi velges for uendelig stor innbyrdes avstand.)

b. En ladningsfordeling er opphav til potensialet $V(x)$ i figuren nedenfor (øverst til venstre). Hvilken av figurene A – E viser den tilhørende elektriske feltstyrken $E(x)$? Her er det elektriske feltet $\vec{E}(x) = E(x)\,\hat{\mathbf{i}}$.



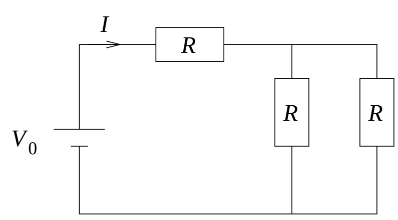
c. To tilnærmet uendelig store parallelle metallplater ligger i innbyrdes avstand d. De to metallplatene har ladning henholdsvis q og $-q$. Et dielektrikum med permittivitet $\epsilon > \epsilon_0$ fyller den nederste halvdelen av rommet mellom platene, som vist i figuren. I den øverste halvdelen har vi vakuum. Pilene i figuren angir da feltlinjer for

A elektrisk flukstetthet $\vec{D}$
B elektrisk felt $\vec{E}$
C elektrisk polarisering $\vec{P}$
D både $\vec{E}$ og $\vec{P}$
E både $\vec{D}$ og $\vec{E}$



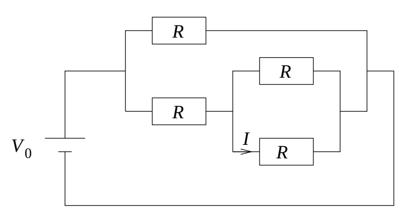
d. Hva blir strømstyrken I angitt i kretsen til høyre?

A V_0/R
B $V_0/3R$
C $3V_0/2R$
D $V_0/2R$
E $2V_0/3R$



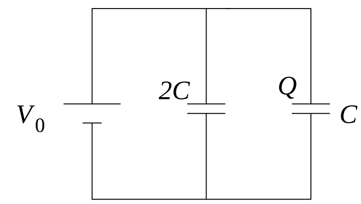
e. Hva blir strømstyrken I angitt i kretsen til høyre?

A V_0/R
B $V_0/3R$
C $3V_0/2R$
D $V_0/2R$
E $2V_0/3R$



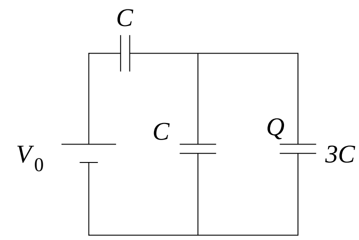
f. Hva blir ladningen Q angitt i kretsen til høyre?

A $3V_0C/2$
B V_0C
C $3V_0C/5$
D $3V_0C$
E $V_0C/3$



g. Hva blir ladningen Q angitt i kretsen til høyre?

A $3V_0C/2$
B V_0C
C $3V_0C/5$
D $3V_0C$
E $V_0C/3$



h. Et elektron med masse m_e og ladning $-e$ befinner seg i et uniformt magnetfelt $\vec{B} = B_0\,\hat{\mathbf{k}}$. Ved tidspunktet $t = 0$ har elektronet hastighet $\vec{v} = v_0\,\hat{\mathbf{i}} + v_0\,\hat{\mathbf{j}}$. Hva slags bevegelse får elektronet?

A Sirkelbevegelse med radius $m_e v_0/eB_0$
B Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e v_0/eB_0$
C Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}eB_0/m_e$
D Sirkelbevegelse med radius $\sqrt{2}m_e/eB_0$
E Sirkelbevegelse med radius eB_0/m_e

i. Hva er magnetisk dipolmoment for en ledersløyfe formet som en regulær sekskant med sidekanter 1.0 cm og strømstyrke 1.0 A i ledertråden?

A 0.02 Acm^2 B 0.1 Acm^2 C 0.5 Acm^2 D 1.1 Acm^2 E 2.6 Acm^2

j. Hva er (absoluttverdien av) impedansen til en kondensator med kapasitans 100 nF når den er koblet til en vekselspenningskilde med vinkelfrekvens 10^6 s^{-1}?

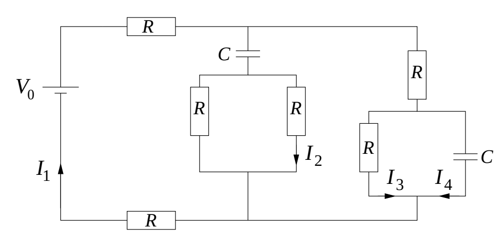
A 0.1 Ω B 1.0 Ω C 10 Ω D 100 Ω E 1000 Ω

k. Hva er (absoluttverdien av) impedansen til en spole med selvinduktans 100 pH når den er koblet til en vekselspenningskilde med vinkelfrekvens 10^6 s^{-1}?

A 0.1 mΩ B 1.0 mΩ C 10 mΩ D 0.1 Ω E 1.0 Ω

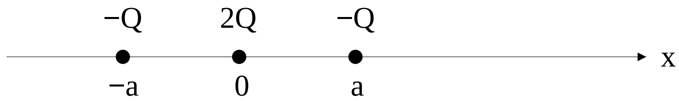
l. I kretsen til høyre har spenningskilden V_0 vært tilkoblet så lenge at strømmene i kretsen ikke lenger endrer seg med tiden. Hva er da de 4 angitte strømstyrkene I_j, $j = 1, 2, 3, 4$?

A $I_1 = V_0/4R$, $I_2 = 0$, $I_3 = V_0/4R$, $I_4 = 0$
B $I_1 = V_0/4R$, $I_2 = V_0/4R$, $I_3 = V_0/4R$, $I_4 = V_0/4R$
C $I_1 = V_0/2R$, $I_2 = 0$, $I_3 = V_0/4R$, $I_4 = 0$
D $I_1 = 3V_0/4R$, $I_2 = V_0/4R$, $I_3 = V_0/4R$, $I_4 = V_0/4R$
E $I_1 = V_0/4R$, $I_2 = 0$, $I_3 = V_0/2R$, $I_4 = 0$



Oppgave 2. (Elektrostatikk, Coulombs lov. Vekt: a teller 10%, b teller 20%. Totalt 30%.)

a. Tre punktladninger er plassert på x-aksen, $-Q$ i $x = \pm a$ og $2Q$ i $x = 0$.

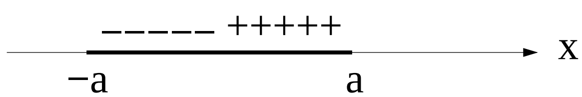


i) Hva er systemets netto ladning?

ii) Hva er systemets elektriske dipolmoment?

iii) Bestem det elektriske potensialet V på x-aksen i punktet $x = 2a$. (Anta referansen $V = 0$ uendelig langt borte.)

b. Vi betrakter deretter en linjeladning på x–aksen, mellom $-a$ og a, nærmere bestemt positiv ladning λ pr lengdeenhet på $0 < x < a$ og negativ ladning $-\lambda$ pr lengdeenhet på $-a < x < 0$:



i) Hva er dette systemets nettoladning?

ii) Hva er dette systemets elektriske dipolmoment?

iii) Bestem det elektriske potensialet $V(x)$ på x-aksen. (Anta $x > a$, samt referansen $V = 0$ uendelig langt borte.)

iv) Langt ute på x-aksen kan $V(x)$ tilnærmet skrives på formen

$$V(x) \simeq \alpha\, x^{-n}.$$

Vis dette og fastlegg derved α og n. (n er heltallig.) [Med "tilnærmet" menes her til såkalt "ledende orden" i den lille dimensjonsløse størrelsen a/x, dvs første ledd i en polynomutvikling i a/x. Merk at punkt iv) langt på vei kan besvares med utgangspunkt i punkt ii), i tilfelle du ikke har fått til punkt iii).]

Oppgitt:

$$(1+\beta)^j \simeq 1 + j\,\beta \quad (|\beta| \ll 1) \qquad , \qquad \ln(1+\beta) \simeq \beta \quad (|\beta| \ll 1)$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}dq \quad \text{evt} \quad \vec{p} = \sum_i \vec{r}_i q_i \qquad , \qquad \int \frac{dz}{c-z} = -\ln(c-z)$$

Coulombpotensialet, liten ladning dq: $V(r) = dq/4\pi\epsilon_0 r$.

<u>Oppgave 3.</u> (Elektrostatikk, Gauss' lov. Vekt: teller 10 %.)

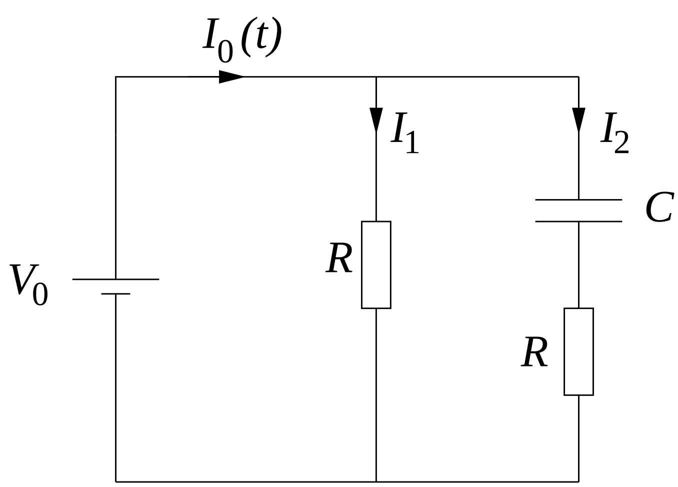
Ei kule med radius R har kulesymmetrisk ladning pr volumenhet $\rho(r) = \rho_0 R/r$. Her er ρ_0 en konstant (med dimensjon ladning pr volumenhet). Bestem den elektriske feltstyrken $E(r)$, både inni og utenfor kula. Lag en skisse av $E(r)$. Hva blir potensialforskjellen $\Delta V = V(0) - V(R)$ mellom sentrum og overflaten av kula?

Oppgitt: Gauss' lov (vakuum):

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon_0$$

<u>Oppgave 4.</u> (RC–krets. Vekt: teller 10 %.)

Vi skal se på følgende elektriske krets, med to motstander R, en kondensator med kapasitans C, og en likespenningskilde V_0:



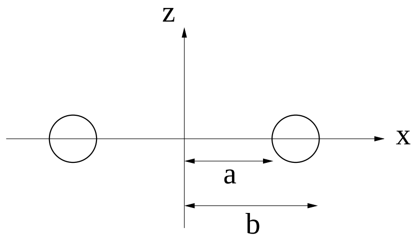
Anta at spenningskilden V_0 kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$. Vi antar videre at det er null ladning på kondensatoren før tilkobling av V_0. Umiddelbart etter tilkobling "leverer" spenningskilden en strøm $I_0(0)$. Ved stasjonære forhold ($t \to \infty$) leverer spenningskilden en strøm $I_0(\infty)$. Bestem strømmen $I_0(t)$, og deretter forholdet

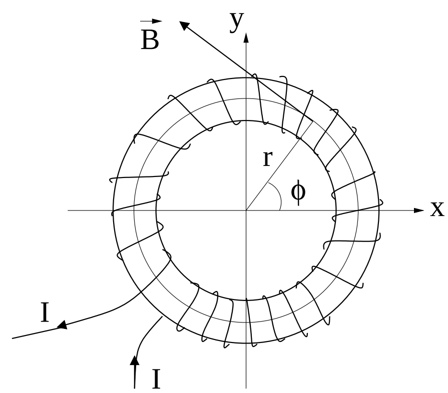
$$\frac{I_0(\infty)}{I_0(0)}$$

Tips: Bruk Kirchhoffs spenningsregel på sløyfa som inneholder V_0, C og R, og dessuten at $dQ(t)/dt = I_2(t)$ og $I_0(t) = I_1 + I_2(t)$.

Oppgave 5. (Amperes lov. Vekt: teller 10 %)

En luftfylt og tettviklet spole har N viklinger og form som en torus ("smultring"). Spoletråden fører en strøm I. Torusen har indre radius a og ytre radius b. Av symmetrigrunner er magnetfeltet overalt rettet tangentielt til en sirkel med sentrum på torusens akse (z–aksen i figuren nedenfor), med andre ord $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ i sylinderkoordinater (r, ϕ, z). I figuren til høyre er en feltlinje for $\vec{B}$ tegnet inn, i avstand r fra z–aksen. Figuren til venstre viser et snitt gjennom spolen, i xz–planet.





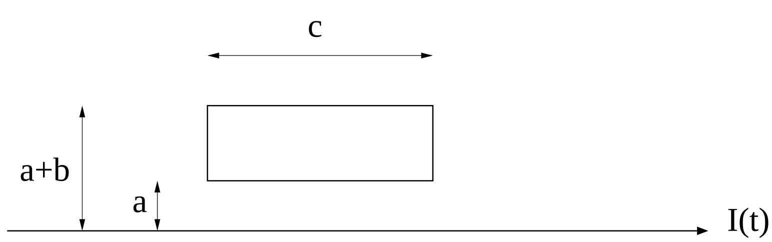
Bruk Amperes lov til å vise at $\vec{B} = 0$ (overalt) utenfor spolen. Bestem så $B(r)$ inni spolen.

Oppgitt: Amperes lov (vakuum):

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_c$$

Oppgave 6. (Magnetisk fluks og induksjon. Vekt: teller 10 %)

En (tilnærmet uendelig) lang og rett leder ligger i avstand a fra ei rektangulær ledersløyfe med sidekanter b og c. (Ledersløyfa ligger i et plan som passerer gjennom den rette lederen.)



Bestem indusert elektromotorisk spenning $\mathcal{E}(t)$ i ledersløyfa når strømmen $I(t)$ i den lange rette lederen skrus på ved tiden $t = 0$ og varierer med t slik (positiv strøm mot høyre):

$$I(t) = \begin{cases} \alpha t I_0 & 0 < t < 1/\alpha \\ I_0 & t \geq 1/\alpha \end{cases}$$

I hvilken retning vil den induserte strømmen i ledersløyfa gå, med eller mot klokka? Gi en kort begrunnelse for svaret.
Tips 1: Det er ikke påkrevd med noen *utledning* av magnetfeltet fra den lange rette lederen. Bruk hukommelsen eller andre tillatte hjelpemidler.
Tips 2: $\int dx/x = \ln x$.

Formelliste
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningene.

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning)

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $\qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q \qquad \oiint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon \qquad \oiint \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i} \qquad \oiint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \qquad \mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \qquad \Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E \qquad \Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I_c + \epsilon\frac{\partial \Phi_E}{\partial t}\right) \qquad \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = I_c + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) $\qquad$ Polarisering: $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ $\qquad$ Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E} \qquad \epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H} \qquad \mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}V\,,$

Energi og energitetthet: $U = \frac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ $\qquad$ Elektrisk: $u = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$ $\qquad$ Magnetisk: $u = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \frac{Q}{V}$ $\qquad$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ $\qquad$ Energi: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\frac{A}{d}$ $\qquad$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ $\qquad$ Seriekopling: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s}\times\vec{B}$ $\qquad$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$ $\qquad$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I\cdot n = I\cdot\frac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad \sigma\vec{E} = \vec{J}$ $\qquad$ Strømtetthet: $\vec{J} = nq\vec{v}_\mathrm{d}$ der $\vec{v}_\mathrm{d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Spoler: $L = N\frac{\Phi_B}{I} \qquad U = \frac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\ell
\end{aligned}$$