

## Formelsamling Bølgefysikk Desember 2006

**Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) \left( \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over bølgelengde  $\lambda$ :

$$\bar{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda A(x, t) dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over periode  $T$ :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, t) dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\bar{P} = v \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\bar{\pi} = \frac{\bar{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_B T$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ( $Q =$  varme):

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ( $Q =$  varme):

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler:  $\gamma = 5/3$ . Gass med 2-atomige molekyler:  $\gamma = 7/5$ .

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass ( $m =$  molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

- Dopplereffekt:

$$\nu_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_S}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet  $\mu_1$  for  $x < 0$  og  $\mu_2$  for  $x > 0$ , innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i  $x = 0$  mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis  $E_1, \rho_1$  (for  $x < 0$ ) og  $E_2, \rho_2$  (for  $x > 0$ ), innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Bølgeligning for  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  i vakuum:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol  $p_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol  $m_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ ):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$  i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t\end{aligned}$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- Diffraksjonsgitter med  $N$  smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ( $\bar{S}$  har hastighet  $\mathbf{v} = v\hat{x}$  i forhold til  $S$ ):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

$$y = \bar{y}$$

$$z = \bar{z}$$

$$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i  $S$  ( $\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$ ):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i  $\bar{S}$  ( $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x\hat{x} + \bar{u}_y\hat{y} + \bar{u}_z\hat{z}$ ):

$$\bar{u}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_y = d\bar{y}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_z = d\bar{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\bar{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$



## Vedlegg 9 av 9

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Energi:

$$E = \gamma mc^2$$

$$E_0 = mc^2$$

$$E_k = E - E_0$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

- Elastisk prosess:  $E$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $E_k$  og  $m$  bevart.
- Uelastisk prosess:  $E$  og  $\mathbf{p}$  bevart.