Løsning Øving 13

Løsning oppgave 1

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_1 + y_2 = A\cos(kx - \omega t + \varphi_1) + A\cos(kx - \omega t + \varphi_2) \\
&\underset{(K7)\text{ og }(K9)}{=} \mathrm{Re}\left\{Ae^{i(kx-\omega t+\varphi_1)} + Ae^{i(kx-\omega t+\varphi_2)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{Ae^{i(kx-\omega t+(\varphi_1+\varphi_2)/2)}\overbrace{\left(e^{i(\varphi_1-\varphi_2)/2} + e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)/2}\right)}^{=2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

(Merk at her er brukt tilsvarende triks som i lign. (4.64) i forelesningene.)

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Re}\left\{2A\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}e^{i(kx-\omega t+(\varphi_1+\varphi_2)/2)}\right\} \\
&\underset{(K7)}{=} 2A\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cos(kx-\omega t+(\varphi_1+\varphi_2)/2) \\
&= \underline{\underline{A_3\cos(kx-\omega t+\varphi_3)}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

der vi har satt:

$$A_3 = \underline{\underline{2A\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}} \qquad (2)$$

$$\varphi_3 = \underline{\underline{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}} \qquad (3)$$

b)

$$\begin{aligned}
y_3 &= A_1\cos(kx-\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(kx-\omega t+\varphi_2) \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}\right)e^{i(kx-\omega t)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{A_3e^{i\varphi_3}e^{i(kx-\omega t)}\right\} \\
&= \underline{\underline{A_3\cos(kx-\omega t+\varphi_3)}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

der A_3 og φ_3 er gitt ved at:

$$A_3e^{i\varphi_3} \equiv A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2} \qquad (5)$$

som gir:
For realdel:

$$A_3\cos\varphi_3 = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \qquad (6)$$

For imagniærdel:

$$A_3 \sin\varphi_3 = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 \tag{7}$$

(7) dividert med (6):

$$\tan\varphi_3 = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \tag{8}$$

og

$$\varphi_3 = \underline{\underline{\arctan \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}}} \tag{9}$$

A_3 finnes f.eks. ved $A_3 = (A_3^2)^{1/2}$ og

$$\begin{aligned} A_3^2 &= A_3 e^{i\varphi_3} \cdot A_3 e^{-i\varphi_3} \\ &\underset{(5)}{=} \left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right) \cdot \left(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}\right) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + A_1 A_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \underline{\underline{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} \end{aligned} \tag{10}$$

c) På helt tilsvarende vis som i pkt. b:

$$\begin{aligned} y_N &= \sum_i A_i \cos(kx - \omega t + \varphi_i) \\ &= \mathrm{Re}\left\{\left(\sum_i A_i e^{i\varphi_i}\right) \cdot e^{i(kx-\omega t)}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{A_N e^{i\varphi_N} e^{i(kx-\omega t)}\right\} \\ &= \underline{\underline{A_N \cos(kx - \omega t + \varphi_N)}} \end{aligned} \tag{11}$$

der A_N og φ_3 er gitt ved at:

$$A_N e^{i\varphi_N} \equiv \sum_i A_i e^{i\varphi_i} \tag{12}$$

som helt tilsvarende som i pkt. b gir:

$$\varphi_3 = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{\sum_i A_i \sin\varphi_i}{\sum_i A_i \cos\varphi_i}\right)}} \tag{13}$$

og

$$A_N^2 = \left(\sum_{i=1}^N A_i e^{i\varphi_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N A_j e^{-i\varphi_j}\right) = \underline{\underline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}}} \tag{14}$$

Løsning oppgave 2

Vi har fra lign. (4.16), (4.17), (4.18) og (4.13) i forelesningene:

$$\begin{aligned}
E_\theta &= E_1 + E_2 = E_0[\cos(kr - \omega t - \varphi') + \cos(k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi')] \\
&= \mathrm{Re}\left\{E_0\left[e^{i(kr-\omega t-\varphi')} + e^{i(k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi')}\right]\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{E_0 e^{i(kr-\omega t-\varphi'+k\Delta r/2)} \cdot \underbrace{\left(e^{-ik\Delta r/2} + e^{ik\Delta r/2}\right)}_{=2\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right)}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{2E_0\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right)e^{i(kr-\omega t-\varphi'+k\Delta r/2)}\right\} \\
&= 2E_0\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right)\cos(kr - \omega t - \varphi' + k\Delta r/2) \\
&= \underline{\underline{E_{\theta_0}\cos(kr - \omega t - \varphi' + \frac{k\Delta r}{2})}}
\end{aligned}$$

som er det samme som lign. (4.21) og (4.22) i forelsning.

Løsning oppgave 3

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{4.80 \cdot 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1.60 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Δt_{fly} er egentiden mellom de to passeringene. Altså må vi ifølge lign. (5.15) i forelesningsnotatene ha:

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{\Delta t_{\text{fly}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{15}$$

der $u = 300$ m/s og $c =$ lyshastigheten. Altså:

$$\Delta t_{\text{fly}} = \Delta t_{\text{jord}}\sqrt{1 - u^2/c^2} \approx \Delta t_{\text{jord}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) \tag{16}$$

Dermed er relativ tidsdifferanse

$$\frac{\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}}}{\Delta t_{\text{jord}}} = \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} = \underline{5.0 \cdot 10^{-13}}$$

og absolutt:

$$\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}} = 5.0 \cdot 10^{-13} \cdot 1.60 \cdot 10^4 \text{ s} = \underline{\underline{8.0 \cdot 10^{-9} \text{ s}}} \approx \underline{\underline{8.0 \text{ ns}}}$$

Merknad: Det har vært gjort forsøk med å sende nøyaktig klokke med et Boeing 747 fly og denne effekten (dvs. lign. (5.15)) har altså blitt verifisert for hastigheter $u \ll c$. (Moderne klokker kan måle tid med presisjon $10^{-11}\ \% = \frac{1}{10^{13}}$ i dag.)

Løsning oppgave 4

a) Levetid ifølge observatør på jorda iflg. lign. (5.15) i forelesningsnotatene:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.20 \cdot 10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1-0.990^2}} = \underline{\underline{15.6 \cdot 10^{-6}\ \text{s}}} \tag{17}$$

b) Lengde Δs_j tilbakelagt ifølge observatør på jorda:

$$\Delta s_j = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = \underline{\underline{4630\ \text{m}}}$$

Lengde målt på jorda fra jorda er egenlengden. Vi har da for lengden Δs_m målt fra muonets hvilesystem ved hjelp av lign. (5.25) i forelesningsnotatene:

$$\Delta s_m = \Delta s_j \sqrt{1-u^2/v^2} = 4630\ \text{m}\sqrt{1-0.990^2} = \underline{\underline{653\ \text{m}}}$$

c) En observatør på jorda vil si at muonet eksisterte $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ og forflyttet seg:

$$\Delta s_j = u \cdot \Delta t = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 4630\ \text{m}$$

En observatør i hvilesystemet til muonet vil si at muonet eksisterte Δt_0 og at jordas koordinatsystem bevegde seg (parallelt muonets sti (sett fra jorda), men i motsatt retning) på Δt_0:

$$\Delta s_m = u\Delta t_0 = 0.990c \cdot 2.20 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 653\ \text{m}$$

Verdiene for Δs_j og Δs_m er her i pkt. c) kun basert på at Δt og Δt_0 er forskjellige på grunn av tidsdilatasjon. I pkt. b) fikk vi samme resultat for Δs_m (ut fra Δs_j) kun basert på lengdekontraksjon.

Løsning oppgave 5

Vi kaller lengden muonet tilbakelegger i jordas referansesystem S, hastigheten (i jordas referansesystem) u_{min} og tida det eksisterer målt fra jorda Δt og egentiden det eksisterer Δt_0. Vi har da:

$$S = u_{\text{min}} \cdot \Delta t = u_{\text{min}} \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(u_{\text{min}}/c)^2}} \tag{18}$$

som gir

$$\left(1 - \frac{u_{\text{min}}^2}{c^2}\right) \cdot S^2 = (u_{\text{min}} \cdot \Delta t_0)^2$$

og

$$\begin{aligned} u_{\text{min}} &= \left(\frac{S^2}{\frac{S^2}{c^2}+(\Delta t_0)^2}\right)^{1/2} = c\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right)^{1/2}} \\ &\approx c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right) \\ &= c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2.20\cdot 10^{-6}\cdot 2.997925\cdot 10^{8}}{1.00\cdot 10^{4}}\right)^2\right) \\ &\approx \underline{\underline{0.997825\ \text{c} \approx 2.9914\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}} \end{aligned} \tag{19}$$

Vi kaller nå lengden fra jordas overflate til dannelsespunktet for muonet i jordas referansesystem for L_0. Tilsvarende lengde i muonets referansesystem kalles L. Vi har da:

$$\begin{aligned} L &= L_0\left(1-(u_{\text{min}}/c)^2\right)^{1/2} \\ &= 1.00\cdot 10^4\ \text{m}\left(1-(0.997825)^2\right)^{1/2} \\ &\approx \underline{\underline{6.59\cdot 10^2\ \text{m}}} \end{aligned} \tag{20}$$

Løsning oppgave 6

Romskipet A har under hele tankeeksperimentet jevn og rettlinjet hastighet. Vi velger derfor å betrakte hele tankeeksperimentet i det inertialsystemet der A er i ro (under hele eksperimentet) og kaller i fortsettelsen dette for A's referansesystem.
I dette referansesystemet er trådens hastighet fra begynnelse til slutt endret fra null til $v = 6.00\cdot 10^6$ m/s.
Målt fra A's referansesystem vil lengden av tråden (dersom den ikke strekkes eller går av) derfor være endret fra L_0 ved begynnelsestilstanden til L ved slutt-tilstanden, med følgende sammenheng mellom L_0 og L:

$$L = L_0/\gamma \tag{21}$$

der

$$\gamma = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \tag{22}$$

(Se lign. (65) og (67) i formelsamlingen vedlagt eksamensoppgaven).
Differansen mellom opprinnelig lengde L_0 av tråden og lengden målt i slutt-tilstanden fra A's referansesystem (dersom tråden ikke brister eller forlenges) kaller vi ΔL. Da har vi:

$$\Delta L = L_0 - L \underset{(21)}{=} L\gamma - L = L(\gamma-1) \tag{23}$$

som gir for $\Delta L/L$:

$$\frac{\Delta L}{L} = (\gamma - 1) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1$$
$$= \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6.0 \cdot 10^6}{3.00 \cdot 10^8}\right)^2 = \underline{2.0 \cdot 10^{-4}} \tag{24}$$

Sentrene til romskipene B og C har i A's referansesystem hele tiden hatt samme akselerasjon og dermed hastighet. Avstanden mellom dem har dermed også alltid vært den samme og er det også etter akselerasjonprogrammet er avsluttet.
For at tråden ikke skal briste, må den derfor tåle forlengelsen ΔL gitt ovenfor ved ligning (23). ΔL og L er begge sett fra A's referansesystem og tråden tåler observert fra hans (og alle andres inertiale) referansesystem kun en relativ forlengelse på $1.00 \cdot 10^{-4}$.
Den relative forlengelsen tråden må tåle for ikke å briste under akselerasjonprosessen er altså gitt ved ligning (24) og lik $2.0 \cdot 10^{-4}$. Det er to ganger den forlengelsen den er oppgitt å skulle tåle.
Altså har tråden gått av under akselerasjonsprosessen.

Merknad:
Denne oppgaven ble gitt for å teste forståelsen av følgende fundamentale aspekt:

1) Avstanden mellom to punkt (her festepunktene til tråden) observert fra ett gitt inertialt referansesystem vil ikke endres når begge punktene hele tiden har samme hastighet observert i dette referansesystemet. Det er ingen forskjell på klassisk mekanikk og spesiell relativitetsteori når det gjeldet dette fordi posisjonen til og avstanden mellom de to punktene hele tiden kan måles (dvs. kan merkes av på et fysisk legeme i ro) i dette referansesystemet.

2) Et fysisk legeme (her tråden) som har en hastighet i forhold til et referansesystem vil i dette referansesystemet observeres med mindre lengde enn den lengden som observeres i det referansesystemet der legemet er i ro. Dette er et av de fundamentale aspekt der spesiell relativitetsteori (og virkeligheten) gir et annet resultat enn klassisk mekanisk teori.

Løsning oppgave 7

Vi har fra lign. (5.49) i forelesningene:

$$E_k = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} dx \tag{25}$$

der x_1 og x_2 er punkter der partikkelen har henholdsvis hastighet 0 og v_1. (Vi har i (25) erstattet v med v_x.)

Vi nytter så

$$a\,dx = \frac{dv_x}{dt}dx = \frac{dx}{dt}dv_x = v_x\,dv_x \tag{26}$$

som innsatt i (25) gir:

$$E_k = \int_0^v \frac{mv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}}dv_x. \tag{27}$$

Vi substituerer:

$$y = 1 - v_x^2/c^2 \tag{28}$$

som gir:

$$dy = -\frac{2v_x}{c^2}dv_x \tag{29}$$

og innsatt i (27):

$$\begin{aligned} E_k &= -\int_1^{1-v^2/c^2} \frac{mc^2}{2}y^{-3/2}dy = \frac{mc^2}{2}\int_{1-v^2/c^2}^{1} y^{-3/2}dy = \frac{mc^2}{2}\left[-2y^{-1/2}\right]_{1-v^2/c^2}^{1} \\ &= mc^2\left((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

som er lign. (5.48) i forelesningene. q.e.d.