

## Løsningsforslag til øving 12

Veiledning 16. november

### Oppgave 1

Lysets bølgelengde endres fra  $\lambda$  i luft til  $\lambda/n \simeq 3\lambda/4$  i vann. Dermed blir avstanden mellom intensitetsmaksima på observasjonsskjermen mindre. Eksempelvis vil avbøyningsvinkelen som svarer til 1. ordens maksimum endres fra  $\arcsin(\lambda/d)$  i luft til  $\arcsin(3\lambda/4d)$  i vann. Her er  $d$  avstanden mellom de to spaltene.

### Oppgave 2

Uten plastfolie foran den ene spalten ville vi ha fått et intensitetsmaksimum på senterlinjen. (Null faseforskjell mellom delbølgene fra de to spaltene.) Ved å dekke den ene spalten med plast, har vi oppnådd en faseforskjell lik  $\pi$  mellom de to delbølgene, ettersom vi nå har null intensitet på senterlinjen. Dermed, med  $k_1 =$  bølgetall for lyset i plasten og  $k_0 =$  bølgetall for lyset i luft (og tilsvarende indekser for bølgelengder og brytningsindeks):

$$k_1 \cdot t - k_0 \cdot t = \pi$$

Vi bruker at  $k = 2\pi/\lambda$  og at  $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$  og finner

$$t = \frac{\lambda_0}{2(n_1 - 1)} = \frac{630}{2 \cdot 0.8} \text{ nm} \simeq 394 \text{ nm}$$

Men vent litt! Vi vet vel egentlig ikke annet enn at faseforskjellen mellom de to delbølgene må være et odde antall ganger  $\pi$ , dvs  $(2m + 1)\pi$ , der  $m$  er lik null eller et helt tall. Vi har dermed flere muligheter:  $t = (2m + 1) \cdot 394 \text{ nm}$ .

### Oppgave 3

Opplosningsevnen vil være bestemt av forholdet  $\lambda/D$ . Dette er uansett ingen skarpt definert grense, så det er ikke mye vits i å bruke  $\arcsin(1.22\lambda/D)$ . Vi finner:

a) For øyet mhp synlig lys: Anta f.eks.  $D = 5 \text{ mm}$  og  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Det gir at vinkelavstanden mellom de to objektene må være minst  $0.0001$  radianer eller ca  $0.006$  grader. (I praksis vil nok ofte atmosfæriske forstyrrelser føre til en betydelig større verdi.)

b) For optisk teleskop med diameter  $8.3 \text{ m}$ :  $5 \cdot 10^{-7}/8.3 \simeq 6 \cdot 10^{-8}$  radianer eller ca  $3$  mikrograder.

c) For et radioteleskop med diameter 305 m og radiobølger med bølgelengde 21 cm:  $0.21/305 \simeq 7 \cdot 10^{-4}$  radianer eller ca 0.04 grader.

En innser raskt fordelene ved å observere i den kortbølgede delen av spektret. Problemet med å gå til enda kortere bølgelengder er at denne strålingen i stor grad absorberes i atmosfæren. Alternativet da er å sette teleskopet på en satellitt og plassere den utenfor jordas atmosfære.

## Oppgave 4

Intensitetsfordelingen ved diffraksjon fra en enkelt spalte med bredde  $a$  er gitt ved

$$I = \hat{I} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

der  $\beta = \pi a \sin \theta / \lambda$ . Dersom vi dobler spaltebredden, vil  $\beta$  bli dobbelt så stor for en gitt avbøyningsvinkel  $\theta$ . Første nullpunkt kommer ved halvparten så stor avbøyningsvinkel, så vinkelpredningen blir med andre ord halvert. Under utledning av denne intensitetsfordelingen antok vi at spalten med endelig bredde  $a$  kunne deles opp i et stort antall tynne spalter med veldig liten bredde  $a/N$  (slik at hver tynne spalte kunne betraktes som en ideell "Huygens-kilde" for sylindrebølger). Med  $I_0$  lik intensiteten fra *en* slik tynn spalte fant vi videre at  $\hat{I} = I_0 \cdot N^2 =$  maksimal intensitet, rett framover, ved  $\theta = 0$ . En dobling av spaltebredden må gi dobbelt så mange slike ideelle "Huygens-kilder", og dermed 4 ganger så stor  $\hat{I}$ . Men ettersom bredden på intensitetsfordelingen samtidig blir halvert, blir total energi som treffer skjermen bare 2 ganger større. Og det passer jo bra, ettersom dobling av spaltebredden må resultere i at vi slipper dobbelt så mye energi gjennom.

## Oppgave 5

Avstanden fra  $S_1$  til en posisjon  $x$  på  $x$ -aksen er  $x$ , mens avstanden fra  $S_2$  til samme posisjon er  $\sqrt{x^2 + d^2}$ . Totalt elektrisk felt i  $x$  blir dermed

$$E(x, t) = E_0 \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} \cos(k\sqrt{x^2 + d^2} - \omega t) + E_0 \frac{d}{x} \cos(kx - \omega t)$$

Eneste grunn til faktoren  $d$  i telleren er at det kanskje er greit at dimensjonen til amplituden  $E_0$  tilsvarer et elektrisk felt. Men bortsett fra det er de felles faktorene  $E_0$  og  $d$  helt uinteressante her, i det vi kun er ute etter hvordan  $E$  avhenger av  $x$ .

Intensiteten  $I(x)$  finner vi ved å kvadrere  $E(x, t)$  for deretter å midle over en periode  $T = 2\pi/\omega$ . Vi får

$$I(x) \sim \langle E(x, t)^2 \rangle \sim \left\langle \frac{1}{L^2} \cos^2(kL - \omega t) + \frac{1}{x^2} \cos^2(kx - \omega t) + \frac{2}{xL} \cos(kL - \omega t) \cos(kx - \omega t) \right\rangle$$

der  $L = \sqrt{x^2 + d^2}$ . Midling over en periode gir en faktor 1/2 i de to første leddene. Det siste leddet må vi se litt nærmere på. Vi bruker at

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

og får

$$\begin{aligned}\cos(kx - \omega t) \cos(kL - \omega t) &= (\cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t) \cdot (\cos kL \cos \omega t + \sin kL \sin \omega t) \\ &= \cos kx \cos kL \cos^2 \omega t + \sin kx \sin kL \sin^2 \omega t + \\ &\quad (\cos kx \sin kL + \sin kx \cos kL) \cos \omega t \sin \omega t\end{aligned}$$

Midling over en periode gir en faktor 1/2 i de to første leddene, mens det siste leddet forsvinner siden

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$$

Videre er

$$\cos kx \cos kL + \sin kx \sin kL = \cos(kL - kx)$$

slik at vi alt i alt får

$$I(x) \sim \frac{1}{2L^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{2xL} \cos(kL - kx) \sim \frac{1}{L^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xL} \cos(kL - kx)$$

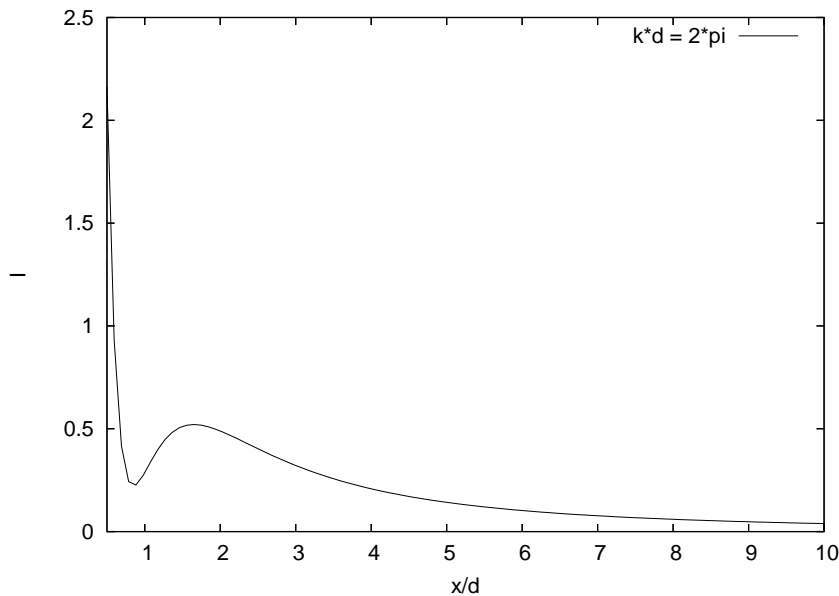
Her kan det være greit å innføre en dimensjonsløs størrelse

$$\alpha = x/d$$

som gjør at vi kan skrive

$$I(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2 + 1} + \frac{2 \cos[kd(\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha)]}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

I figuren nedenfor er denne funksjonen plottet, med valget  $kd = 2\pi$ , dvs at  $d = \lambda$ :



I neste figur er funksjonen plottet, med valget  $kd = 20\pi$ , dvs at  $d = 10\lambda$ :

