Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 6

Veiledning 28. september

Oppgave 1

a) Bølgelengden:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330}{1000}\,\mathrm{m} = 33\,\mathrm{cm}$$

Intensitetsnivået β målt i dB er definert ved

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Med $I = 10^{-9}$ W/m^2 har vi

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}$$

Intensiteten I tilsvarer en (midlere) effekt P pr flateenhet A. Effekten som mottas på en flate med areal 0.5 cm^2 blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9} \text{ W/m}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

(som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.)

b) Sammenhengen mellom intensiteten I og utsvingsamplituden ξ_0 har vi utledet i forelesningene:

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

Her er ρ massetettheten, ω er vinkelfrekvensen, og v er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}}\,\mathrm{m} \simeq 0.34\,\mathrm{nm}$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes utstrekning.
Trykkendringen Δp er relatert til utsvinget ξ (se forelesningene):

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x, t) = -\gamma p k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$(\Delta p)_0 = \gamma p k \xi_0 = \frac{7}{5} \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9 \text{ mPa}$$

Relativ trykkvariasjon i forhold til likevektstrykket p blir

$$\frac{(\Delta p)_0}{p} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{10^5} = 9 \cdot 10^{-9}$$

Ikke rare greiene!

c) Fra tilstandsligningen for ideell gass, $pV = Nk_BT$ får vi

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \Delta \left(\frac{Nk_BT}{V} \right) \\
&= \frac{Nk_B}{V} \Delta T - Nk_BT \frac{\Delta V}{V^2} \\
&= \frac{Nk_BT}{V} \frac{\Delta T}{T} - \frac{Nk_BT}{V} \frac{\Delta V}{V} \\
&= p \frac{\Delta T}{T} - p \frac{\Delta V}{V}
\end{aligned}$$

Som ventet: En trykkøkning ($\Delta p > 0$) ledsages både av en temperaturøkning ($\Delta T > 0$) og en volumreduksjon ($\Delta V < 0$). Det som gjenstår er å finne ut hvor store ΔT og ΔV er hver for seg. Det får vi til ved å benytte oss av antagelsen om adiabatiske forhold, nemlig

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

Det medfører at

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V}$$

eller

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p}$$

som innsatt i uttrykket ovenfor for Δp gir

$$\Delta p = p \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{\gamma} \Delta p$$

og endelig

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\Delta p}{p}$$

Med andre ord: Temperaturvariasjonen $\Delta T(x,t)$ forplanter seg, på tilsvarende vis som $\Delta p(x,t)$, som en bølge med amplitude

$$(\Delta T)_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{p} (\Delta p)_0$$

Den relative temperaturvariasjonen blir

$$\frac{(\Delta T)_0}{T} = \left(1 - \frac{5}{7} \right) \cdot 9 \cdot 10^{-9} \simeq 3 \cdot 10^{-9}$$

Absolutt temperaturvariasjon blir

$$(\Delta T)_0 \simeq 1\mu\mathrm{K}$$

Heller ikke rare greiene.

Oppgave 2

a) B

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 10\log\frac{I_1}{I_0} \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\
\beta_2 &= 10\log\frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} + \frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\
\Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16
\end{aligned}$$

b) C
Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden (se f.eks. oppgave 1b). Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78$$

c) D

$$\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A_{\mathrm{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0\ \mathrm{mW/m^2} \\
\Rightarrow \beta &= 10\log\frac{2.0\cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93\ \mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Litt repetisjon: Generelt er hastigheten til mekaniske bølger gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{\text{mediets elastiske modul}}{\text{mediets massetetthet}}}$$

Lydhastigheten i en gass er dermed i utgangspunktet gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

der B er gassens bulkmodul [N/m^2] og ρ er gassens massetetthet [kg/m^3]. I forelesningene viste vi at for en ideell gass under adiabatiske forhold (ingen utveksling av varme - *det* foregår typisk veldig langsomt i forhold til hvor fort lyden forplanter seg) kan bulkmodulen uttrykkes ved hjelp av trykket p og den såkalte *adiabatkonstanten* $\gamma \equiv C_p/C_V$:

$$B = \gamma p$$

Her er $C_p = (dQ/dT)_p$ gassens varmekapasitet (evt. spesifikk varme) når trykket p holdes konstant, mens $C_V = (dQ/dT)_V$ tilsvarende er varmekapasiteten når volumet V holdes konstant. Symbolet Q angir varme, mens T er temperaturen. For gasser med en-atomige molekyler er $\gamma = 5/3$, og for gasser med to-atomige molekyler er $\gamma = 7/5$. Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

For ideell gass har vi sammenhengen

$$pV = Nk_BT$$

mellom gassens trykk p, volum V, temperatur T og antall molekyler N. ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant) Massetettheten kan skrives $\rho = m \cdot N/V$, der m er molekylmassen. Dermed kan lydhastigheten også uttrykkes ved

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

Vi har her $T = 303$ K og molekylmasse

$$m = 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq 6.68 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{5 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 303}{3 \cdot 6.68 \cdot 10^{-26}}} \simeq 323 \text{ m/s}$$

Dette er ikke langt unna den målte verdien 324.37 m/s, så det tyder på at antagelsene om ideell gass og adiabatiske forhold er gode.

b) Dersom trykket i gassen økes fra 1 til 2 atm uten at temperaturen endres, vil eksperimentet gi uendret lydhastighet, ettersom $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$, dvs egentlig bare avhengig av temperaturen. Dersom trykket i gassen økes fra p_1 til $p_2 = 2p_1$ uten at varme utveksles med omgivelsene (dvs adiabatisk), vil både temperaturen T og massetettheten ρ øke. Vi kan starte med å finne det nye volumet V_2 (dvs: det volumet som ved trykk $p_2 = 2$ atm okkuperes av like mange molekyler

N som ved $p_1 = 1$ atm okkuperte et volum V_1). Vi bruker antagelsen om adiabatiske forhold, $pV^\gamma =$ konstant:

$$
\begin{aligned}
p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\
p_1 V_1^\gamma &= 2 p_1 V_2^\gamma \\
V_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} V_1 \simeq 0.66 V_1
\end{aligned}
$$

Ny temperatur T_2 blir dermed

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{p_2 V_2}{N k_B} \\
&= \frac{2p_1 \cdot 0.66 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 \frac{p_1 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 T_1
\end{aligned}
$$

Molekylmassen har ikke endret seg, så den nye lydhastigheten blir

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T_2}{m}} \\
&= \sqrt{1.32} v_1 \\
&= 372.60 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$