Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 9

Veiledning 26. oktober

Oppgave 1

a) Forplantning i z-retning betyr at $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ begge ligger i xy-planet. La oss for eksempel velge $\boldsymbol{E}$ langs $\hat{x}$. Innkommende bølge:

$$\boldsymbol{E}_i = \hat{x}\, E_{i0}\, \cos(k_1 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_i = \hat{y}\, B_{i0}\, \cos(k_1 z - \omega t)$$

Reflektert bølge:

$$\boldsymbol{E}_r = \hat{x}\, E_{r0}\, \cos(-k_1 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_r = -\hat{y}\, B_{r0}\, \cos(-k_1 z - \omega t)$$

Transmittert bølge:

$$\boldsymbol{E}_t = \hat{x}\, E_{t0}\, \cos(k_2 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_t = \hat{y}\, B_{t0}\, \cos(k_2 z - \omega t)$$

Total bølge for $z < 0$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{B}_r$$

Total bølge for $z > 0$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_t$$

Bølgetallene i de to mediene er $k_1 = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_2 = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Magnetfeltamplitudene kan vi uttrykke ved amplitudene til det elektriske feltet, dvs $B_{i0} = E_{i0}/v_1$, $B_{r0} = E_{r0}/v_1$ og $B_{t0} = E_{t0}/v_2$.
Retningen på magnetfeltet er fastlagt (ved $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$) når retningen på $\boldsymbol{E}$ er valgt. Legg merke til at vi her ikke har antatt noe bestemt med hensyn til fasen til $\boldsymbol{E}_r$ og $\boldsymbol{E}_t$ i forhold til $\boldsymbol{E}_i$: Dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en positiv størrelse, betyr det at $\boldsymbol{E}_r$ er *i fase* med $\boldsymbol{E}_i$, og dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en negativ størrelse, betyr det at $\boldsymbol{E}_r$ er *i motfase* med $\boldsymbol{E}_i$. Og tilsvarende for $\boldsymbol{E}_t$.
Maxwells ligninger resulterte i kontinuitet av tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{H}$ i grenseflater mellom to medier. Vi antar lineær respons, slik at tangentialkomponenten av $\boldsymbol{B}/\mu$ blir kontinuerlig i grenseflaten, dvs i $z = 0$. Her har feltene ingen komponent normalt på grenseflaten, slik

at kontinuitet av tangentialkomponenten betyr rett og slett kontinuitet av $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}/\mu$. Dette gir følgende to ligninger:

$$
\begin{aligned}
E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\
\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{E_{i0}}{v_1} - \frac{E_{r0}}{v_1}\right) &= \frac{1}{\mu_2}\frac{E_{t0}}{v_2}
\end{aligned}
$$

Her kan notasjonen forenkles noe ved å innføre $\beta \equiv \mu_1 v_1/\mu_2 v_2$. Den siste av disse to ligningene blir da

$$E_{i0} - E_{r0} = \beta E_{t0}$$

Løsning med hensyn på de to ukjente amplitudene E_{r0} og E_{t0} gir

$$
\begin{aligned}
E_{r0} &= \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{i0} \\
E_{t0} &= \frac{2}{1+\beta} E_{i0}
\end{aligned}
$$

b) Midlere intensitet i en harmonisk elektromagnetisk bølge er

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$$

der $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ er permittiviteten til mediet som bølgen forplanter seg i. Dette gir, for refleksjonskoeffisienten:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)^2 = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2$$

For medier som i praksis kan regnes som umagnetiske, dvs $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, har vi

$$\beta \simeq \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

slik at

$$R = \left(\frac{1 - n_2/n_1}{1 + n_2/n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

Transmisjonskoeffisienten blir

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_{t0}^2}{\varepsilon_1 v_1 E_{i0}^2}$$

Med tilnærmelsen $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$ blir $\varepsilon_2 v_2 \simeq n_2^2 c/n_2 = n_2 c$ og tilsvarende $\varepsilon_1 v_1 \simeq n_1 c$ slik at

$$T = \frac{n_2}{n_1}\frac{4}{(1 + n_2/n_1)^2} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

For grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med $\varepsilon_r = 2.25$ har vi $n_1 = 1$ og $n_2 = \sqrt{2.25} = 1.5$, som gir

$$R = \left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2 = 0.04$$

og dermed $T = 1 - R = 0.96$. Det virker rimelig: Nesten alt lys propagerer inn i (og gjennom) glass ved normalt innfall.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi ikke regne ut hvor mye av intensiteten i innkommende bølge som blir reflektert og transmittert (refraktert), vi skal kun se på *retningen* til reflektert og transmittert bølge.

a) I grenseflaten er $\boldsymbol{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$. Generelt vil de tre bølgetallsvektorene $\boldsymbol{k}_i$, $\boldsymbol{k}_r$ og $\boldsymbol{k}_t$ være forskjellige. Grensebetingelsene for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i grenseflaten $z = 0$ resulterer i en del ligninger på formen

$$A\cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) + B\cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = C\cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

Anta at denne er oppfylt på et bestemt sted $\boldsymbol{r}_1 = x_1\,\hat{x} + y_1\,\hat{y}$, og la oss for eksempel velge tidspunktet $t = 0$. Da er altså

$$A\cos \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}_1 + B\cos \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r}_1 = C\cos \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_1$$

Men denne ligningen må samtidig gjelde for alle mulige $\boldsymbol{r}_j$ i planet $z = 0$:

$$A\cos \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}_j + B\cos \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r}_j = C\cos \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_j$$

for $j = 1, 2, 3, \ldots$. Det er åpenbart at dette kun er mulig dersom alle tre cosinusfaktorene er like store, uavhengig av hvilken posisjon $\boldsymbol{r}$ vi velger. Følgelig må vi ha

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}$$

for alle mulige posisjoner $r = (x, y, 0)$ i grenseflaten.

La oss nå for eksempel velge en posisjon $r = (x, 0, 0)$. Det gir

$$k_{ix}x = k_{rx}x = k_{tx}x$$

dvs

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

Videre kan vi velge $r = (0, y, 0)$, som gir

$$k_{iy}y = k_{ry}y = k_{ty}y$$

dvs

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Konklusjon: Forplantningsretningene til innkommende, reflektert og transmittert bølge ligger i ett og samme plan, *innfallsplanet*, som også inneholder grenseflatens flatenormal (her: $\hat{z}$).

b) Uten tap av generalitet (som det så fint heter) kan vi velge akser slik at innkommende bølge har $k_{iy} = 0$. Dermed er også $k_{ry} = k_{ty} = 0$. I figuren i oppgaveteksten danner da papirplanet xz-planet, og vi ser uten videre at

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_i \sin\theta_i \\ k_{rx} &= k_r \sin\theta_r \\ k_{tx} &= k_t \sin\theta_t \end{aligned}$$

I oppgave a konkluderte vi med at disse tre må være like store. Vi har videre $k_i = k_r = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_t = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Det gir

$$\theta_i = \theta_r,$$

refleksjonsloven, og

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t,$$

brytningsloven (Snells lov).

Kommentar: Jeg kan i forelesningene ha kommet i skade for å hevde at grenseflatebetingelsene som $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ må oppfylle, blant annet gir Snells lov som resultat. Vi ser nå at dette strengt tatt ikke er helt riktig: Det eneste vi har brukt i denne oppgaven er *formen* på ligningene som følger fra disse grenseflatebetingelsene. Av den grunn må vi forvente at også andre typer harmoniske bølger (f.eks. overflatebølger eller lydbølger) vil oppføre seg på lignende vis når de støter på slike grenseflater mellom to ulike medier.

Men hvis vi er interessert i å finne ut hvordan innkommende intensitet fordeler seg på reflektert og transmittert bølge (dvs: bestemme refleksjons- og transmisjonskoeffisienter), slipper vi ikke utenom "detaljene" i grenseflatebetingelsene.