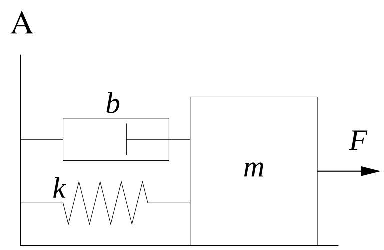
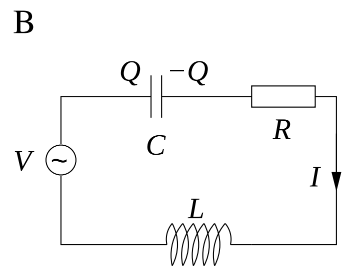
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høst 2006

Øving 2

Veiledning: Torsdag 31. august
Innleveringsfrist: Mandag 4. september





a) I forelesningene har vi sett at det mekaniske svingesystemet i figur A ovenfor, med $F(t) = F_0 \cos \omega t$, oppfyller bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t,$$

der x representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.
Vis, ved hjelp av Kirchhoffs spenningsregel, at den elektriske svingekretsen i figur B, med $V(t) = V_0 \cos \omega t$, oppfyller en tilsvarende differensialligning,

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos \omega t,$$

der Q representerer ladningen på kondensatoren.
Ved direkte sammenligning ser en at selvinduktansen L i det elektriske svingesystemet er *analog* til massen m i det mekaniske svingesystemet. (Ikke urimelig: m representerer treghet i det mekaniske systemet, dvs en motstand mot endringer i hastigheten; L representerer treghet i det elektriske systemet, dvs en motstand mot endringer i strømstyrken.)
Hva er den elektriske svingekretsens analogier til størrelsene b, k, F_0, x og $\dot{x}$ i det mekaniske systemet?

b) Vi betrakter nå fri ($F = 0$), (under-)dempede ($b/2m \equiv \delta < \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$) svingninger i det mekaniske systemet i figur A. Dersom vi ønsker at relativt energitap pr periode, $\Delta E/E$, ikke skal overstige en bestemt verdi α, må dempingen ikke være større enn

$$b_{\max} = \frac{\sqrt{4km}}{\sqrt{1 + [4\pi / \ln(1-\alpha)]^2}}$$

Vis dette. Vis deretter at vi tilnærmet kan skrive

$$b_{\max} = \alpha \, \frac{\sqrt{km}}{2\pi}$$

dersom $\alpha \ll 1$.

c) La oss deretter betrakte den elektriske svingekretsen med spenningskilden $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Siden systemet er helt analogt det mekaniske, må ladningen på kondensatoren bli

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \phi_0),$$

i det vi antar at spenningskilden har stått på så lenge at en eventuell homogen løsning $Q_h(t)$ av den tilsvarende homogene ligningen kan neglisjeres.
Amplituden til ladningen på kondensatoren er nå gitt ved

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega G(\omega)},$$

mens fasekonstanten er gitt ved

$$\cos \phi_0 = \frac{R}{G(\omega)}.$$

Her er

$$G(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

(Her har du to muligheter: 1. Simpelthen godta disse uttrykkene, eller 2. Sett inn den oppgitte løsningen $Q(t)$ i differensialligningen og vis at Q_0 og ϕ_0 blir som angitt.)
Bestem den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_1$ til spenningskilden som gir størst mulig ladningsamplitude Q_0. Bestem også den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_2$ som gir størst mulig strømamplitude. Bestem tallsvar for ω_1 og ω_2 når kretsen har følgende komponenter: $R = 100\,\Omega$, $L = 0.1$ mH, $C = 10$ nF. Finn til slutt (tall-)verdien til de tilhørende fasekonstantene ϕ_{01} og ϕ_{02}.

Oppgitt: Spenningsfall over motstand: RI; over kondensator: Q/C; over induktans: $L\dot{I}$.

Fasitsvar:

c: $\omega_1 = 0.7$ MHz, $\omega_2 = 1$ MHz, $\phi_{01} = 35°$, $\phi_{02} = 0$.