Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høst 2006

Øving 3

Veiledning: Torsdag 7. september
Innleveringsfrist: Mandag 11. september

Oppgave 1
En bølge forplanter seg langs en streng utstrakt horisontalt (i x-retning). Strengen har kun vertikale utsving (i y-retning). Vi antar at strengen er uendelig lang og at utsvinget til strengen (overalt og til alle tider) er beskrevet ved:

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

der $A = 1.0$ cm, $k = 2\pi/10$ cm^{-1} og $\omega = 200\pi$ s^{-1}.

a) Tegn opp (dvs. skisser for hånd), gjerne i samme figur, utsvinget y som funksjon av x i for $0 \leq x \leq 25$ cm for $t = 0$, $t = 2.5$ og $t = 5.0$ ms. I hvilken retning forplanter bølgen seg? For hvilke tider t vil utslaget y (for alle verdier av x) være det samme som for $t = 0$?

b) Finn perioden T for denne bølgen (dvs. tiden mellom for eksempel to påfølgende maksimalutsving i positiv y-retning for en gitt x-verdi).

c) Finn bølgelengden λ for denne bølgen (dvs. for eksempel avstanden mellom to nærmeste bølgetopper).

d) Finn hastigheten v_f som bølgetoppen forplanter seg med i x-retning. (Denne hastigheten kalles fasehastigheten til bølgen). Finn også den maksimale hastigheten $v_p^{\max}$ til et strengelement. (Hastigheten v_p kalles ofte partikkelhastighet.)

e) Finn den maksimale akselerasjon $a^{\max}$ et strengelement kan ha.

f) Dersom

$$y = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

skal beskrive eksakt den samme bølgen som

$$y = A\sin(kx - \omega t),$$

hvilken verdi må ϕ ha? (Bølgeforplantning med bølger som kan beskrives ved en sinusfunksjon eller en cosinusfunksjon som ovenfor, kalles harmoniske bølger. Ethvert strengelement svinger harmonisk.)

Oppgave 2
a) Vis at summen $y_3 = y_1 + y_2$ av to harmoniske bølger med samme amplitude, frekvens og bølgelengde beskrevet ved

$$y_1 = A\cos(kx - \omega t + \phi_1)$$

og

$$y_2 = A\cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

også er en harmonisk bølge beskrevet ved

$$y_3 = A_3\cos(kx - \omega t + \phi_3).$$

Finn A_3 og ϕ_3 uttrykt ved A, ϕ_1 og ϕ_2.

(Hint: $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$)

b) Vi lar nå faseforskjellen mellom de to bølgene y_1 og y_2, dvs $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$, variere. Finn hvilke verdier av $\Delta\phi$ som gir henholdsvis maksimalverdi og minimalverdi for $|A_3|$. Bestem $|A_3|^{\max}$ og $|A_3|^{\min}$.

Oppgave 3
Følgende bølgeligning gjelder for flere typer bølger som forplanter seg i en dimensjon:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Vi antar at vi ikke har dispersjon og at v derfor er en konstant for et gitt medium. Vi antar også at vi ikke har demping.

a) Vis at dersom $D_1(x,t)$ og $D_2(x,t)$ begge er løsning av (1), så er også $D(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t)$ en løsning av (1).

Merk at dette medfører at en vilkårlig sum av løsninger av (1) også er løsning av (1).

Merk også at fysisk betyr dette at to eller flere bølger kan passere samme sted i et medium til samme tid uten å forstyrre hverandre, men på de steder der mer enn en bølge er ulik null til samme tid, adderes utslagene algebraisk (dvs: med fortegn).

b) Vis at

$$D(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{2}$$

er løsning av (1). Her er f og g vilkårlige kontinuerlige og to ganger deriverbare funksjoner.

Merk at $f(x - vt)$ representerer en vilkårlig bølge som forplanter seg i positiv x-retning og at $g(x+vt)$ representerer en vilkårlig bølge som forplanter seg i negativ x-retning. $D(x,t)$ gitt ved (2) representerer derfor en vilkårlig bølgebevegelse for medier uten dispersjon og demping.

(Hint: Bruk kjerneregelen på partiell derivasjon. På grunn av det vi har vist i pkt. a, er det nok å se på en av f og g om gangen.)