

Øving 5

Veiledning: Torsdag 21. september
Innleveringsfrist: Mandag 25. september

Oppgave 1

En gaussformet bølgepuls

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{a^2} \right]$$

vandrer med hastighet v langs ei fjær med massetetthet μ [kg/m] og elastisk modul K [N]. Størrelsen $\xi(x, t)$ representerer det longitudinale utsvinget (i forhold til likevekt) ved tidspunkt t for den biten av fjæra som har likevektsposisjon x .

a) Hvordan kan vi være sikre på at $\xi(x, t)$ virkelig er en mulig bølgepuls langs ei slik fjær? I hvilken retning propagerer bølgen?

b) Hvordan avhenger bølgehastigheten v av fjæras elastiske egenskaper (dvs K) og treghets-egenskaper (dvs μ)? Kontroller at uttrykket for v har riktig dimensjon.

c) Finn et uttrykk for (den totale) energien E assosiert med bølgepulsen. Kontroller at uttrykket for E har riktig dimensjon.

Tips: Ta utgangspunkt i at bølgens energi pr lengdeenhet er

$$\varepsilon(x, t) = \mu v^2 \left(\frac{d\xi}{dX} \right)^2$$

som utledet i forelesningene, med $X \equiv x - vt$. Dermed er $\varepsilon(x, t) dx$ bølgens energiinnhold mellom x og $x + dx$. Det oppgis her følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Svar:

1c: $E = \sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2 / \sqrt{2} a$

Oppgave 2

Som nevnt i forelesningene, er det mulig å finne en eksakt løsning for longitudinale bølger på masse-fjær-transmisjonslinjen, uten å anta at bølgelengden λ er mye større enn avstanden d mellom to nabomasser. Ved å betrakte kreftene som virker på massen m med likevektsposisjon x , endte vi opp med følgende bevegelsesligning:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = s [\xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x)]$$

Her er $\xi(x \pm d)$ utsvinget til massen med likevektsposisjon $x \pm d$, mens s er fjærkonstanten (bruker her s siden vi trenger k for å angi bølgetallet).

La oss starte med å anta at en harmonisk bølge på formen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

er løsning av bevegelsesligningen over.

a) Bestem $\xi(x+d) - \xi(x)$ og $\xi(x-d) - \xi(x)$ ved å benytte relasjonen

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

b) Vis deretter at bevegelsesligningen ovenfor resulterer i følgende sammenheng mellom vinkel-frekvensen ω og bølgetallet k :

$$\omega^2 = \frac{4s}{m} \sin^2 \left(\frac{kd}{2} \right)$$

c) I forelesningene viste vi at for lange bølgelengder ($\lambda \gg d$, eventuelt $kd \ll 1$) blir bølgehastigheten konstant (dvs uavhengig av bølgelengden) og lik

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

Vis at den eksakte sammenhengen mellom ω og k (den såkalte *dispersjonsrelasjonen*) fra punkt b gir samme resultat for v i grensen $kd \ll 1$.

d) Et slik enkelt masse-fjær-system som vi har sett på her, er en ganske brukbar modell for forplantning av longitudinale bølger i krystallinske materialer. Du vil lære mer om dette i emner som Faste stoffers fysikk senere i studiet.

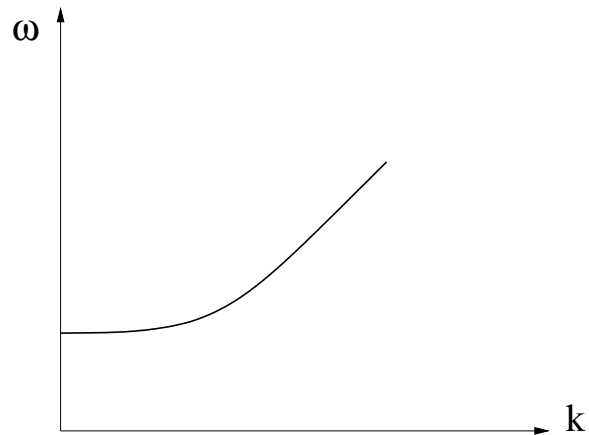
Bruk resultatene ovenfor til å vise at longitudinale bølger tilsvarende hørbar lyd vil forplante seg med konstant (dvs frekvensuavhengig) hastighet v gjennom et metall.

Tips: Anslå bølgelengden for hørbar lyd og sammenlign med en typisk avstand mellom naboatomer i en metallkrystall.

Oppgave 3

a) Figuren viser sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for en bestemt type bølger. Hvilket utsagn er da korrekt?

- A Fasehastigheten er her den samme uansett bølgelengde.
- B Fasehastigheten er her størst for korte bølgelengder.
- C Fasehastigheten er her størst for lange bølgelengder.
- D Fasehastigheten øker alltid med økende frekvens.



b) Transversale bølger på en streng med strekk-kraft S forplanter seg med bølgehastighet v . En *liten* endring ΔS i strekk-kraften fører da til en endring i bølgehastigheten lik

- A $\Delta v = -v \Delta S / 2S$
- B $\Delta v = v \Delta S / 2S$
- C $\Delta v = v \Delta S / S$
- D $\Delta v = -v \Delta S / S$

c) Transversale bølger på en streng med massetetthet μ forplanter seg med bølgehastighet v . En *liten* endring $\Delta \mu$ i massetettheten fører da til en endring i bølgehastigheten lik

- A $\Delta v = -v \Delta \mu / 2\mu$
- B $\Delta v = v \Delta \mu / 2\mu$
- C $\Delta v = v \Delta \mu / \mu$
- D $\Delta v = -v \Delta \mu / \mu$