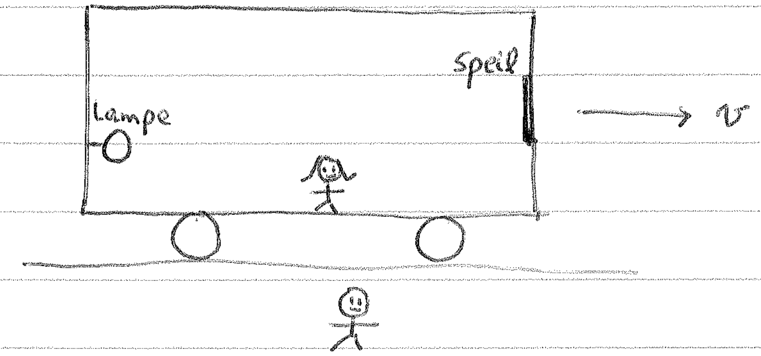
Lengdekontraksjon (LL 12.4, TM 39,3)



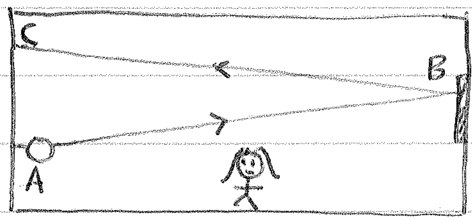
Hendelser:

A lyset slås på

B lyset reflekteres i speilet

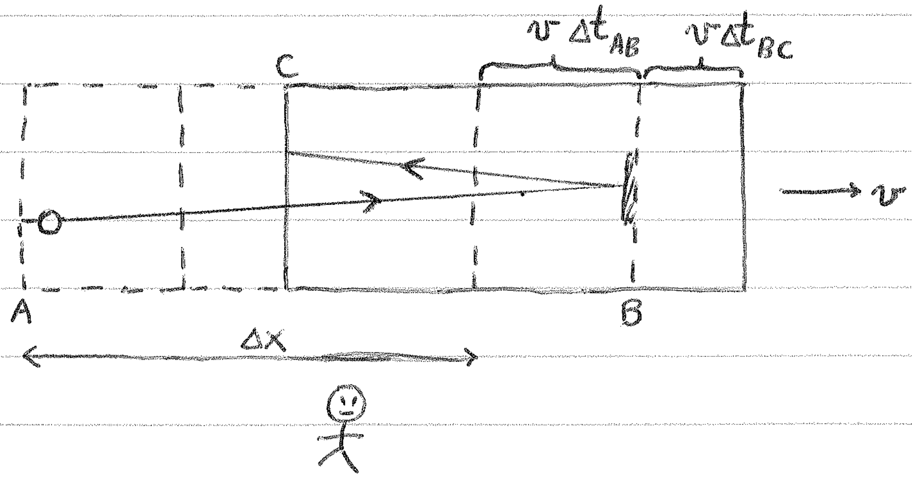
C lyset treffer bakveggen

Siv:



$$\Delta \bar{t}_{AC} = 2\,\frac{\Delta \bar{x}}{c} \quad , \quad \Delta \bar{x} = \frac{1}{2}\, c\, \Delta \bar{t}_{AC}$$

Sam:



$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c} + \frac{v\,\Delta t_{AB}}{c} \quad , \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c} - \frac{v\,\Delta t_{BC}}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c-v} \quad , \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c+v}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AC} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x(c+v) + \Delta x(c-v)}{c^2 - v^2} = \frac{2\Delta x \cdot c}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2\Delta x}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} c \, \Delta t_{AC} \left(1 - v^2/c^2\right)$$

Tidsdilatasjon $\Rightarrow \Delta \bar{t}_{AC} = \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \Delta \bar{x} = \frac{1}{2} c \, \Delta \bar{t}_{AC} = \frac{1}{2} c \, \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2\Delta x}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad > \Delta x$$

> Et objekt er lengst i det inertialsystemet hvor objektet er i ro.

eller:

> Objekter i bevegelse krymper(*)
> (i den retning bevegelsen foregår).

(*) Vogne i bevegelse i forhold til Sam

$\Rightarrow$ Sam ser krympet vogn, $\Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \, \Delta \bar{x} \quad < \Delta \bar{x}$

Egentiden ("proper time") er tiden målt mellom to hendelser av klokke i ro i ref. system der hendelsene skjer i faste rompunkter. Tiden mellom de to hendelsene målt i alle andre ref. system er alltid lengre enn egentiden.

Egenlengden ("proper length") er lengden målt i ref. system der objektet er i ro. Objektets lengde målt i alle andre ref. system er alltid kortere enn egenlengden.

$\boxed{\text{Ingen lengdekontraksjon normalt på } \vec{v}\text{, kun parallelt med } \vec{v}:}$

Hendelser:

A Sam setter blå strek i høyde $\Delta y = 1$ m over bakken. (På f.eks. en husvegg)

B Siv setter rød —— " —— $\Delta \bar{y} = 1$ m —— " ——. (På samme vegg.)

Hvis kontraksjon i y-retning (av objekt i bevegelse i x-retning):

Sam vil si at rød strek er nederst.

Siv vil si at blå —— " ——. (For Siv beveger veggen seg!)

Sam og Sivs påstand er like gode da begge er i inertialsystemer.

$\Rightarrow$ Kun én mulighet: rød og blå strek like høyt på veggen,

$\Delta y = \Delta \bar{y}$, ingen kontraksjon $\perp \vec{v}$

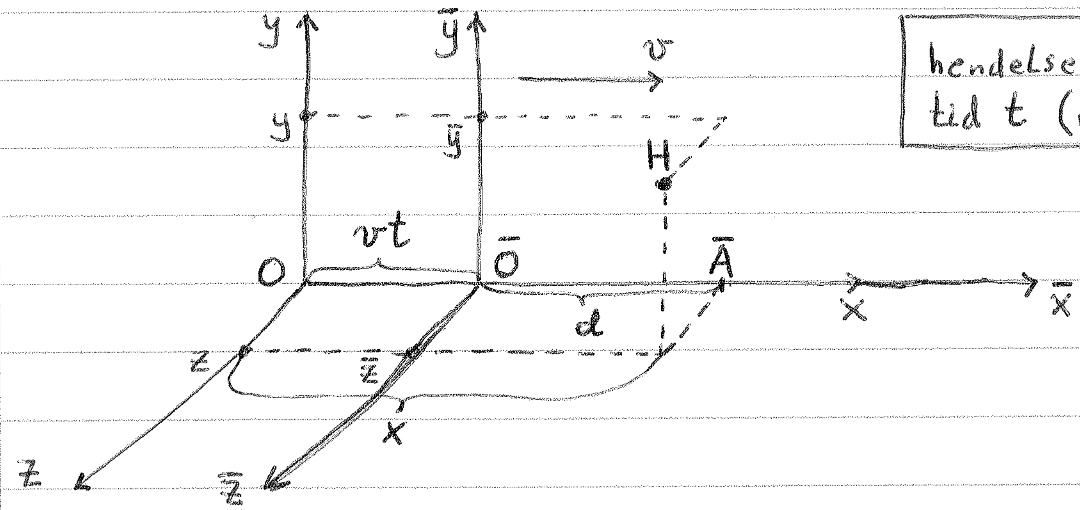
Lorentztransformasjonene ("LT") (LL 12.2, TM 39.3)
(H.A. Lorentz 1904; Einstein 1905)

Hendelse: noe som skjer i bestemt posisjon ved bestemt tid

Hendelse i S : (x, y, z, t)
— " — $\bar{S}$: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$

LT angir sammenhengen mellom (x,y,z,t) og $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$ for <u>en og samme</u> hendelse (H).

Antar $\vec{v} = v\hat{x}$ samt felles origo, $\bar{O} = O$, ved $t = 0$:



hendelse H ved tid t (målt i S)

$$\left.\begin{aligned} \text{Galileo: } H_x &= \bar{O}\bar{A} + O\bar{O} = d + vt = x \\ H_{\bar{x}} &= \bar{O}\bar{A} = d = \bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x} = x - vt$$

$$H_y = H_{\bar{y}} \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = y$$

$$H_z = H_{\bar{z}} \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = z$$

$$H_t = H_{\bar{t}} \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = t$$ ("Hva ellers?!")

Einstein: $d = \bar{O}\bar{A}$ målt i S, $\bar{x} = \bar{O}\bar{A}$ målt i $\bar{S}$ $\Big\} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{d}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \cdot d$

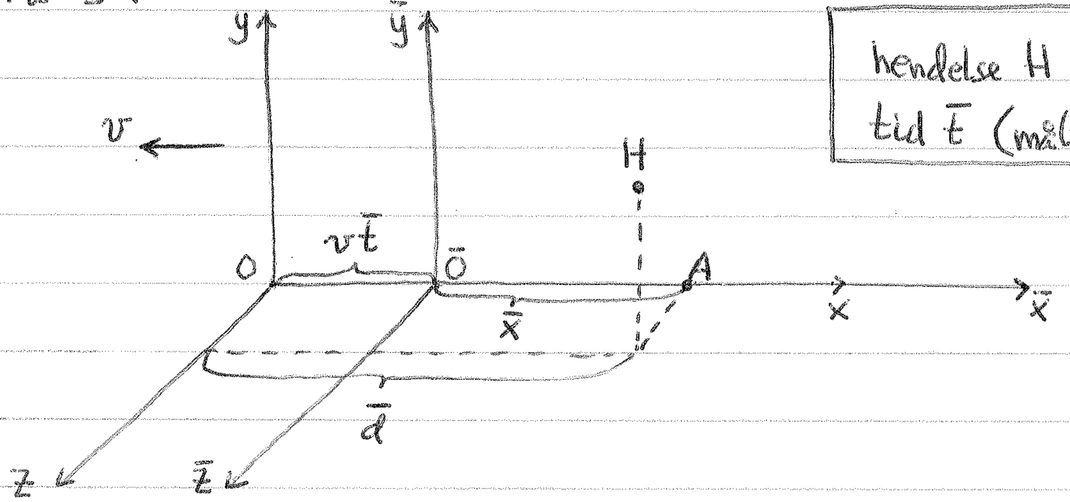
(pga lengdekontraksjon)

(dvs: $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ = "Lorentzfaktoren")

Dermed: $x = d + vt = \dfrac{\bar{x}}{\gamma} + vt \Rightarrow \bar{x} = \gamma(x - vt)$

Sett fra $\bar{S}$:

hendelse H ved tid $\bar{t}$ (målt i $\bar{S}$)



$\bar{d} = OA$ målt i $\bar{S}$, $x = OA$ målt i S $\Big\} \Rightarrow x = \dfrac{\bar{d}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \bar{d}$

(igjen: pga lengdekontraksjon)

Dermed: $\bar{x} = \bar{d} - v\bar{t} = \dfrac{x}{\gamma} - v\bar{t} \Rightarrow x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$

[som ventet...]

Eliminerer $\bar{x}$ (for å finne $\bar{t}(x,t)$):

$$x = \gamma\{\overbrace{\gamma x - \gamma v t}^{\bar{x}} + v\bar{t}\} \Rightarrow \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma v t = v\bar{t}$$

$$\Rightarrow \bar{t} = \gamma t - \gamma x \,\frac{1 - 1/\gamma^2}{v} = \gamma t - \gamma x \,\frac{1-(1-v^2/c^2)}{v} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Ingen kontraksjon $\perp \vec{v} \implies y = \bar{y}$ og $z = \bar{z}$.

Dermed:

Hendelse i $\bar{S}$ (som har hastighet $v\hat{x}$ i forhold til S) uttrykt ved hendelse i S:

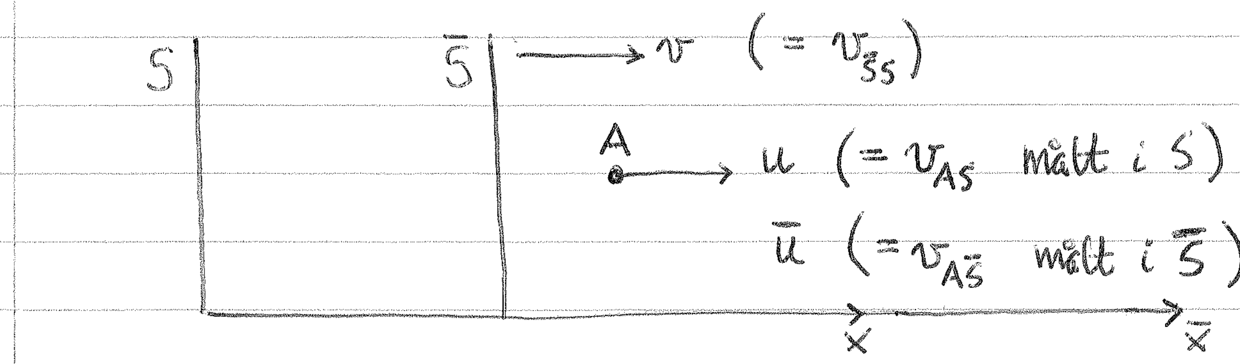
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \gamma(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

Hendelse i S (som har hastighet $-v\hat{x}$ i forhold til $\bar{S}$) uttrykt ved hendelse i $\bar{S}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) \end{aligned}}$$

der $\gamma = \{1 - v^2/c^2\}^{-1/2}$

Relative hastigheter (LL 12.3, TM 39.5)



Galileo: $u = \bar{u} + v \qquad \left(v_{AS} = v_{A\bar{S}} + v_{\bar{S}S}\right)$

Einstein: $u = dx/dt$

$$\bar{u} = d\bar{x}/d\bar{t}$$

der $d\bar{x} = \gamma(dx - v\,dt)$

$$d\bar{t} = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Eller:

$$u = \frac{\gamma(d\bar{x} + v\,d\bar{t})}{\gamma\left(d\bar{t} + \frac{v}{c^2}d\bar{x}\right)} = \frac{\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}} = \frac{\bar{u} + v}{1 + \frac{\bar{u}v}{c^2}}$$

$$\left(v_{AS} = \frac{v_{A\bar{S}} + v_{\bar{S}S}}{1 + \frac{v_{A\bar{S}}\,v_{\bar{S}S}}{c^2}}\right)$$