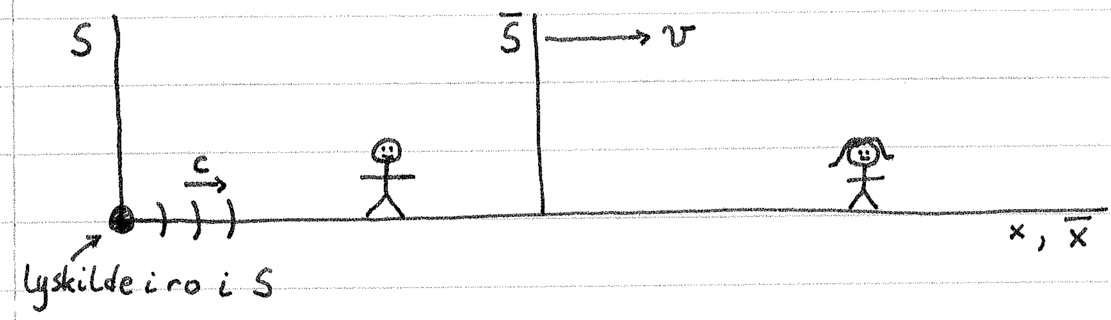
22.11.06

Dopplereffekt for e.m. bølger (LL 12.6, TM 39.3)



Sam observerer:		Sivs posisjon målt av Sam:
$t=0$:	1. puls sendes ut	x_0
$t=t_1$:	—"— når Siv	$x_1 = x_0 + v t_1 = c t_1$
$t=T$:	2. puls sendes ut	$x_0 + vT$
$t=t_2$:	—"— når Siv	$x_2 = x_0 + v t_2 = c(t_2 - T)$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = c(t_2 - t_1) - cT$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{c}{c-v} T \; ; \quad x_2 - x_1 = \frac{cv}{c-v} T$$

Periode målt av Siv:

$$\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1\right)$$

$$= \gamma \frac{c}{c-v} T - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{cv}{c-v} T = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cdot \frac{c^2 - v^2}{c(c-v)} \cdot T$$

$$= \frac{c+v}{\sqrt{c^2-v^2}} T = \sqrt{\frac{(c+v)^2}{(c+v)(c-v)}} T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T$$

$$\Rightarrow \text{Frekvens målt av Siv: } \bar{\nu} = \frac{1}{\bar{T}} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \nu \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

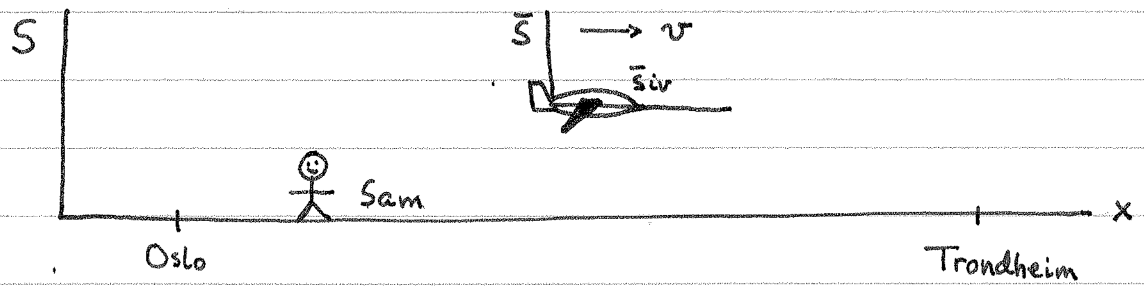
Hvis $v \ll c$: $\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2} \approx \left(1 - \frac{v}{2c} \ldots\right)\left(1 - \frac{v}{2c} \ldots\right) \approx 1 - \frac{v}{c}$

$$\Rightarrow \bar{\nu} \approx \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

, det samme som vi fant med lyd (kilde i ro, observatør i bevegelse)

Relativistisk mekanikk (bittelitt) (LL 12.7+12.8, TM 39.6+39.7)

impuls = masse · hastighet, men hvilken hastighet?



To muligheter for $\bar{S}$iv i flyet:

1. "Ordinær hastighet": $v = \frac{dx}{dt}$ med dx og dt som målt av Sam

2. "Egenhastighet": $\eta = \frac{dx}{d\bar{t}}$ med $d\bar{t}$ som målt av $\bar{S}$iv på hennes egen klokke ($d\bar{t}$ = egentiden)

Pga tidsdilatasjon: $d\bar{t} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \vec{\eta} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dersom prinsippet om impulsbevarelse(*) ønskes intakt, må relativistisk impuls defineres ved egenhastigheten:

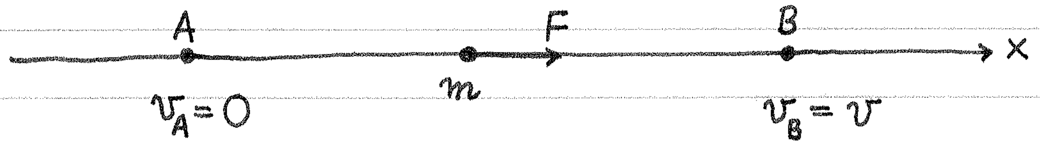
$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\eta} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

(*) ...som er et eksperimentelt faktum...

Newtons 2. lov : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Arbeid W utført av $\vec{F}$ på partikkel
→ endring i partikkelens kinetiske energi :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \Delta E_k$$



$$E_k = \int_A^B F\,dx = \int_A^B \frac{dp}{dt}\,dx = \int_0^v \frac{dp}{dv} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}\,dv$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d}{dv}\left\{ \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right\} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2v}{c^2}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{m(1-v^2/c^2) + m\,v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_k = \int_0^v \frac{mv\,dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \Bigg|_0^v \frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2$$

Hvileenergi : $E_0 = mc^2$
Total energi : $E = E_k + E_0 = \gamma mc^2$

Hvis $\underline{v \ll c}$: $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \Rightarrow \underline{E_k} \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)mc^2 - mc^2 = \underline{\frac{1}{2}mv^2}$ OK!

Eksperimentelt faktum:

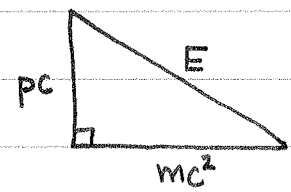
> For lukket system er total relativistisk energi E og impuls $\vec{p}$ bevart.

Nyttig sammenheng: $p = \gamma m v = \gamma m c^2 \frac{v}{c^2} = E \frac{v}{c^2}$

$\Rightarrow v^2 = p^2 c^4 / E^2 \Rightarrow E^2 = \dfrac{(mc^2)^2}{1 - p^2 c^2 / E^2}$ (fikk bort v)

$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$



Foton: $m = 0 \Rightarrow E = pc$

Partikkel i ro: $p = 0 \Rightarrow E = mc^2$

Disse resultatene kan brukes til å analysere kollisjoner mellom partikler, fusjon, fisjon osv.

Elastiske prosesser: E, $\vec{p}$ <u>og</u> E_k bevart ($\Rightarrow$ også m bevart)

Uelastiske —″— : E, $\vec{p}$ bevart, E_k og m <u>ikke</u> bevart