(Ekstratime 15.11.06)

Litt om Fourieranalyse

Bølgeligningen: (f = utsving på streng, lydtrykk, E, B, ...)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Løsning: $f(x \pm vt)$

Kan være rent harmonisk, f.eks.

$$\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

men ikke nødvendigvis.

Men: Kan "alltid" skrive løsningen av bølgeligningen som sum (eventuelt integral) av harmoniske funksjoner.

Generelt er $f(x \pm vt)$ ikke en periodisk funksjon, verken mhp x eller t.

Vi ser likevel først på periodiske funksjoner, dvs slike som oppfyller

$$f(x,t) = f(x, t+T)$$

eventuelt

$$f(x,t) = f(x+\lambda, t)$$

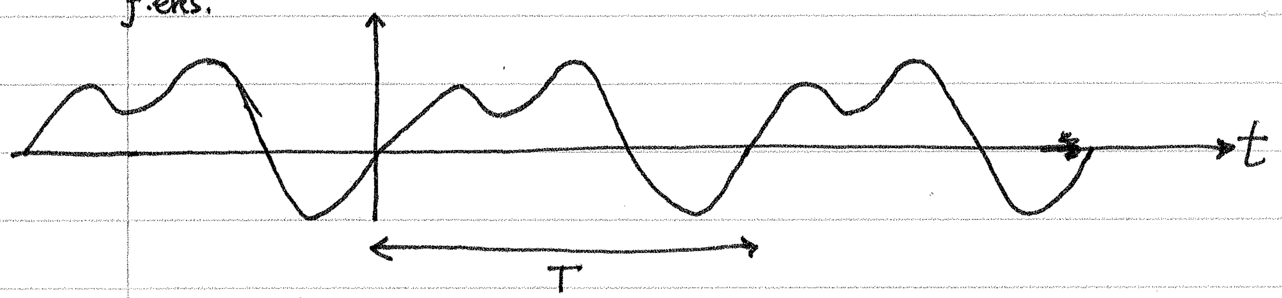
Vilkårlige ikke-periodiske funksjoner kan deretter betraktes ved å la $T \to \infty$ (eventuelt $\lambda \to \infty$).

Fourierrekke:

Ser på "vilkårlig" (dog: kontinuerlig og deriverbar) periodisk funksjon

$$f(t) = f(t+T)$$

f.eks.



[Dersom bølge, $f(x,t)$, antar vi en eller annen fast posisjon, f.eks. $x=0$.]

Kan da skrive:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

$(\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$(\varphi = \omega_0 t)$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi$$

Ettersom
$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \pi & \text{når } m=n \\ 0 & \text{når } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \pi & \text{når } m=n \\ 0 & \text{når } m \neq n \end{cases}$$

kan vi multiplisere $f(\varphi)$ med $\cos n\varphi$, integrere fra 0 til 2π, og finne

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi \qquad (n=1,2,3,\ldots..)$$

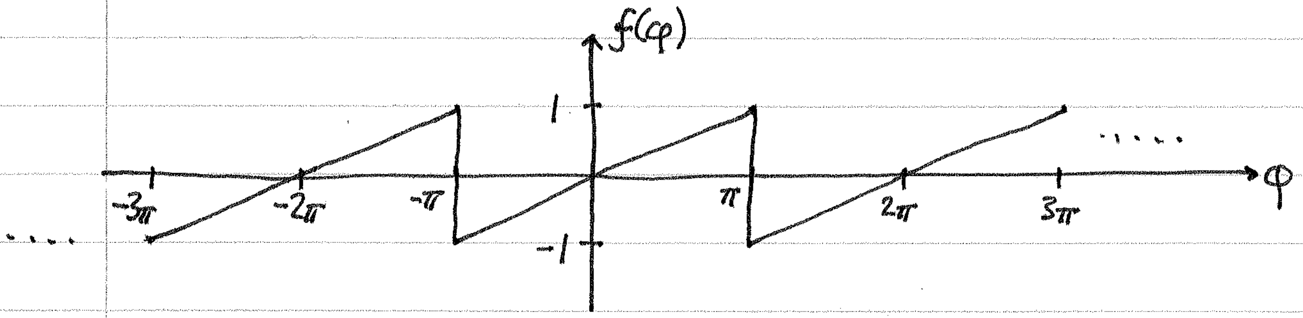
eller mult. $f(\varphi)$ med $\sin n\varphi$, integrere fra 0 til 2π, og finne

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi \qquad (n=1,2,3,\ldots.)$$

eller rett og slett integrere $f(\varphi)$ fra 0 til 2π og finne

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \qquad (= \langle f(\varphi)\rangle)$$

<u>Eksempel 1</u>



Finn fourierrekken til "sagtann-funksjonen" $f(\varphi)$!

Løsning: Ser straks at $\langle f\rangle = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

Ser også at $f(\varphi)$ er en <u>odde</u> (antisymmetrisk) funksjon $\Rightarrow$ alle $a_n = 0$ (siden $\cos n\varphi$ er en <u>like</u> funksjon)

130 D

Kan bestemme b_n ved å integrere over hvilken som helst periode $\Rightarrow$ velger fra $-\pi$ til π :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi}{\pi}\sin n\varphi \, d\varphi$$

Delvis integrasjon: $u = \varphi \quad v' = \sin n\varphi$

$u' = 1 \quad v = -\cos(n\varphi)/n$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{ \Big|_{-\pi}^{\pi} -\frac{\varphi\cos n\varphi}{n} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\varphi \, d\varphi}_{=0} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left\{ -\frac{\pi}{n}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \frac{(-\pi)}{n}\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} \right\} = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin n\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \dots \right\}$$

Med $\varphi = \omega_0 t = \frac{2\pi}{T} t$:

Laveste frekvens : $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \omega_0$; Fourier-amplitude (-koeffisienter) : $\frac{2}{\pi}$

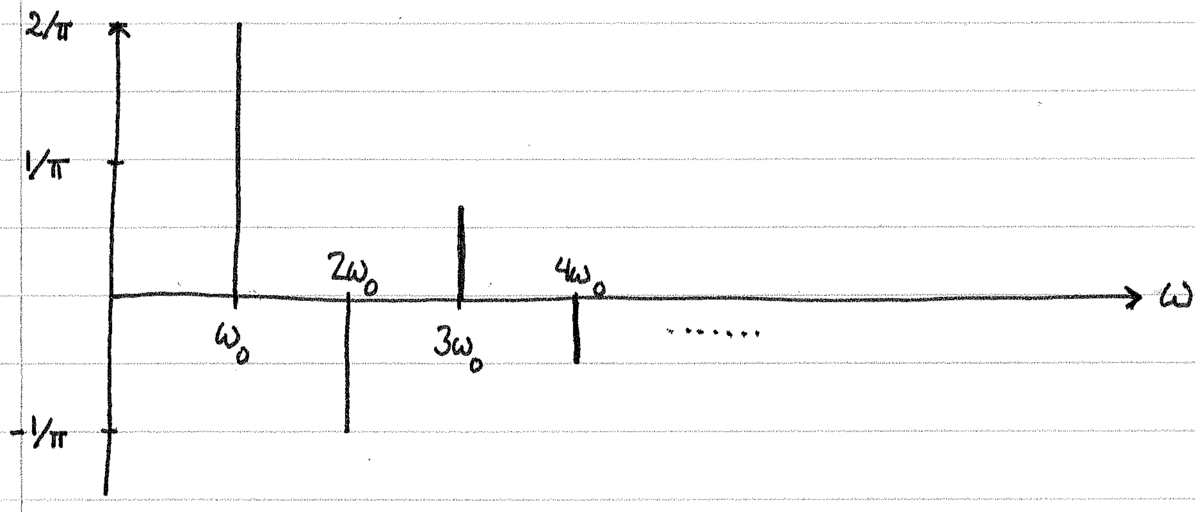
2. —"— : $\omega_2 = 2\omega_0$; —"— : $-\frac{1}{\pi}$

3. —"— : $\omega_3 = 3\omega_0$; —"— : $\frac{2}{3\pi}$

⋮

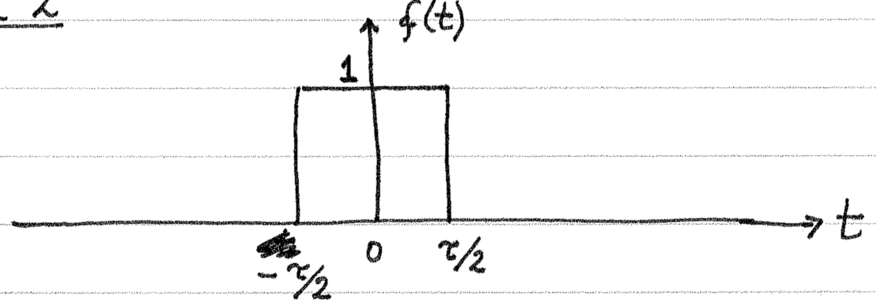
n. —"— : $\omega_n = n\omega_0$; —"— : $\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$

Fourier-spektrum:



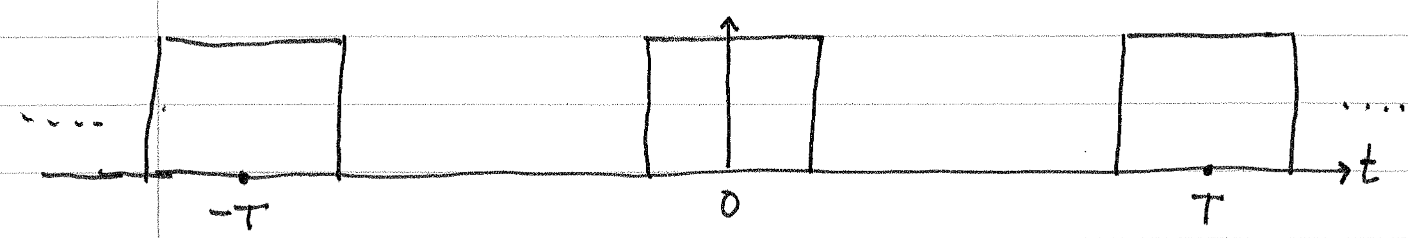
⇒ Periodisk funksjon har diskret fourier-spektrum.

Eksempel 2



Finn fourier-spektret til (den ene) firkantpulsen $f(t)$.

Løsning: Anta først at vi har en periodisk funksjon:



Vi løser dette problemet og lar $T \to \infty$ til slutt.

like funksjon $\Rightarrow$ alle $b_n = 0$

$$a_0 = \langle f \rangle = \tau / T$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \right)$$

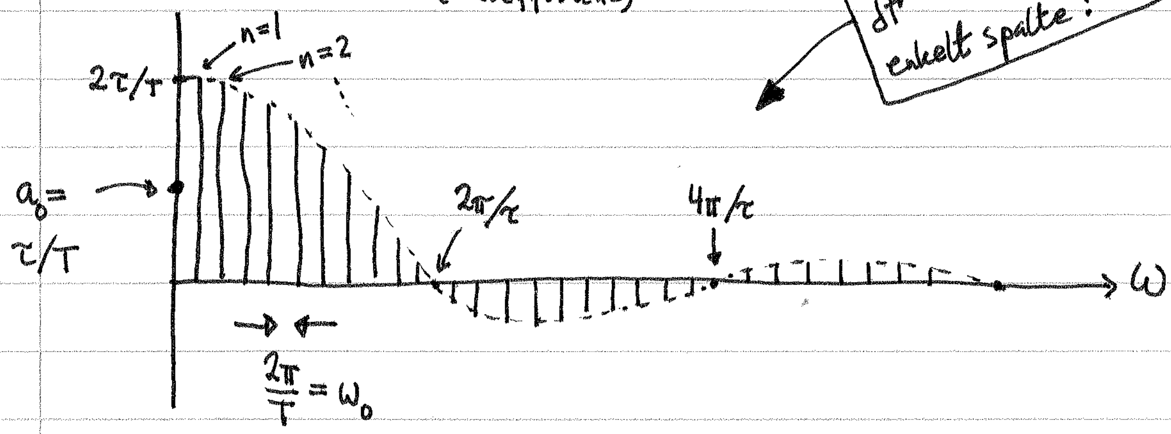
$$= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\tau/2} \cos n\omega_0 t \, dt + \int_{T-\tau/2}^{T} \cos n\omega_0 t \, dt \right\}$$

$$= \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} \left\{ \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} - \sin n\omega_0 \left(T - \frac{\tau}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right]}_{\substack{\text{fourier-amplitude } n \\ (\text{-koeffisient})}} \cos n\omega_0 t + \frac{\tau}{T}$$

jfr diffraksjon fra enkelt spalte!



$T \to \infty \Rightarrow$ <u>kontinuerlig</u> fourier-spektrum

Pulsbredde: τ "Båndbredde": $2\pi/\tau$

$\Rightarrow \Delta t \cdot \Delta\omega \sim 2\pi$ (<u>Smal</u> puls krever <u>stor</u> båndbredde, dvs "mange" frekvenser)

Fourier-integral:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\int_0^T f(u)\cos(n\omega_0 u)\,du\right]\cos(n\omega_0 t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\int_0^T f(u)\sin(n\omega_0 u)\,du\right]\sin(n\omega_0 t)$$

$$\omega_n = n\omega_0$$

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}\Delta\omega$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \cdot y(\omega_n) \xrightarrow[(T\to\infty)]{\Delta\omega\to 0} \int_0^{\infty} d\omega\, y(\omega)$$

$T \to \infty$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\omega t \int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du\,d\omega$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\omega t \int_0^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du\,d\omega$$

[antar $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,du \longrightarrow 0$, dvs antar $\int_0^{\infty} f(u)\,du < \infty$]

Dvs: Vilkårlig, ikke-periodisk, $f(t)$ inneholder generelt "alle" frekvenser. Fourier-spektret er <u>kontinuerlig</u>, med fourier-koeffisienter

$$a(\omega) = \int_0^{\infty} f(u)\cos\omega u\,du\,; \quad b(\omega) = \int_0^{\infty} f(u)\sin\omega u\,du$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} a(\omega)\cos\omega t\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} b(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$