TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.

Løsningsforslag til øving 1

Oppgave 1

a) Vi antar at Hookes lov, $F = kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

med $\omega^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$.
Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A\cos\phi$$

og

$$v_0 = -\omega A \sin\phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\omega}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos\arctan v_0/x_0\omega}$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}$$

b) Siden vi ikke har noen demping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Det endelige svaret her gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien.

c) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega B\sin\omega t + \omega C\cos\omega t$$

og dermed

$$B = x_0$$

og

$$C = v_0/\omega$$

d) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0\sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right)} = v_0\sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0\sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

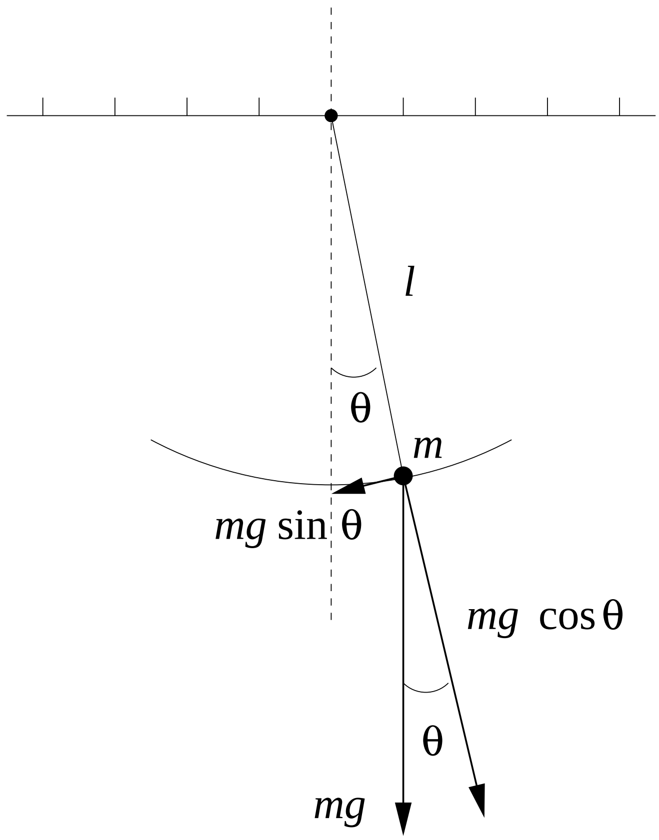
$$E_{p0} = 0.5 \cdot 100 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{200}$$

$$E_{k0} = 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.20^2 = \frac{1}{200}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI–enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 28$ cm/s.

Oppgave 2

a) Figuren nedenfor viser kule og snor når snora danner en vinkel θ med vertikalretningen.



Den vertikale tyngdekraften mg kan dekomponeres i en komponent i snoras lengderetning, $mg\cos\theta$, og en komponent tangentielt til svingebevegelsens (sirkulære) bane, $mg\sin\theta$. Førstnevnte komponent utlignes av snordraget (ikke tegnet inn i figuren), ettersom det ikke er noen bevegelse i snoras lengderetning. Sistnevnte komponent bestemmer bevegelsen via Newtons andre lov,

$$-mg\sin\theta = ma$$

Her har vi valgt positiv retning mot klokka, dvs positiv verdi for θ samt positiv posisjon når utsvinget er som i figuren over. Vi ser at kraften alltid vil virke i motsatt retning av utsvinget, og det er ivaretatt med minustegnet i bevegelsesligningen. For bevegelse i sirkulær bane med radius l har vi følgende sammenheng mellom lengde ds og vinkelendring $d\theta$: $ds = l\,d\theta$. Hastigheten er dermed

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

og akselerasjonen

$$a = \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Innsetting gir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

b) Siste ligning i punkt a kan løses eksakt, slik at frekvens og periode kan uttrykkes ved et såkalt elliptisk integral. Men dersom utsvinget ikke er for stort, vil θ hele tiden være liten, slik at vi tilnærmet kan skrive $\sin\theta \simeq \theta$. Bevegelsesligningen forenkler seg da til

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

som er på samme form som den vi kjenner for posisjonen $x(t)$ i "masse–fjær-systemet. Vi må dermed ha en harmonisk løsning

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

for vinkelen θ, der vinkelfrekvensen er $\omega = \sqrt{g/l}$. Svingebevegelsens periode blir altså

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vi ser at kulas masse m ikke har noen innvirkning på svingetiden. Dessuten har vel alle erfart at en kort pendel svinger raskere enn en lang en.

Kommentar: Den beregnede svingetiden blir en dårligere og dårligere tilnærmelse jo større pendelens utsving er. Den eksakte løsningen kan skrives som en (uendelig) potensrekke i vinkelamplituden θ_0, der de første par leddene ser slik ut:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + ...\right)$$

Her må vi selvsagt bruke enheten radianer for vinkelen θ_0.

Oppgave 3

a) Newtons 2. lov gir oss klossenes bevegelsesligninger. La oss f.eks. velge positiv retning for utsving fra likevekt mot høyre. I den nederste figuren har vi da $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ og $x_1 > x_2$, slik at fjæra til venstre er strukket mens den i midten og den til høyre er presset sammen. Venstre fjær er strukket en lengde x_1 og virker på masse 1 med en kraft mot venstre. Fjæra i midten er sammenpresset en lengde $x_1 - x_2$ og virker på masse 1 med en kraft mot venstre og masse 2 med en kraft mot høyre. Fjæra til høyre er sammenpresset en lengde x_2 og virker på masse 2 med en kraft mot venstre. Dermed har vi kraft på masse 1:

$$F_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$$

og kraft på masse 2:

$$F_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

Newtons 2. lov gir da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 \end{aligned}$$

b) Innsetting av antatte løsninger for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ gir ligningene

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A &= k(-2A + B) \\ -m\omega^2 B &= k(A - 2B) \end{aligned}$$

etter at vi har strøket en felles faktor $\cos(\omega t + \phi)$ i alle ledd. Fra hver av disse ligningene kan vi finne et uttrykk for forholdet A/B:

$$\begin{aligned} A/B &= k/(2k - m\omega^2) \\ A/B &= -(2k - m\omega^2)/k \end{aligned}$$

Ettersom venstre side i disse ligningene er like store, må også høyre side være det. Dermed:

$$k/(2k - m\omega^2) = -(2k - m\omega^2)/k$$

eller

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Dette er en 2.gradsligning for ω^2, med løsninger

$$\omega^2 = \frac{4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} = \frac{4km \pm 2km}{2m^2}$$

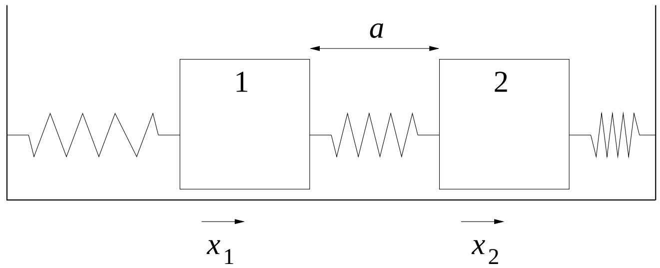
dvs k/m og $3k/m$. De mulige vinkelfrekvensene som klossene kan svinge med er følgelig $\omega_a = \sqrt{k/m}$ og $\omega_s = \sqrt{3k/m}$, som vi skulle vise.

c) Vi finner sammenhengen mellom A og B for hver av de to vinkelfrekvensene ved å sette inn i det ene eller andre uttrykket ovenfor for forholdet A/B:

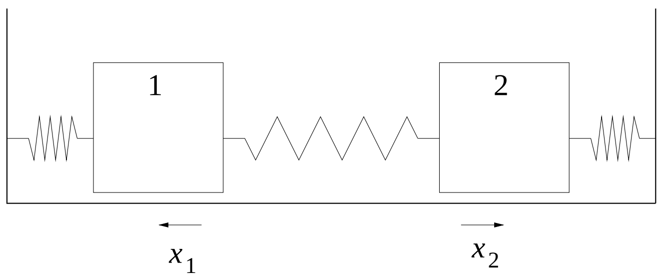
$$\begin{aligned} A_a/B_a &= k/(2k - m\omega_a^2) = 1 \\ A_s/B_s &= k/(2k - m\omega_s^2) = -1 \end{aligned}$$

Det betyr at i den "antisymmetriske moden" er $x_1 = x_2$, og de to massene svinger fram og tilbake med samme fase, uten at fjæra i midten strekkes eller presses sammen. I den "symmetriske moden" er $x_1 = -x_2$, og de to massene svinger i motfase, slik at fjæra i midten strekkes og presses sammen dobbelt så mye som fjærene til venstre og høyre.

Antisymmetrisk mode:



Symmetrisk mode:



I den antisymmetriske moden påvirkes hver av de to massene kun av krafta fra ei fjær, ettersom fjæra i midten verken strekkes eller presses sammen. Med andre ord, hver masse svinger på samme måte som om den andre ikke var til stede, og vi må ha $\omega_a^2 = k/m$.
I den symmetriske moden er fjæra til venstre strukket en lengde x_1 og fjæra i midten er sammenpresset en lengde $2x_1$ når masse 1 er i posisjon x_1. Da blir total kraft på masse 1 lik $-3kx_1$. Med andre ord, masse 1 svinger som om den var festet til ei fjær med fjærkonstant $3k$, slik at vi må ha $\omega_s^2 = 3k/m$. (Tilsvarende argument kan gjennomføres for masse 2.)
Vi ser at dette stemmer med resultatet i punkt b).

Kommentar: For å få systemet til å svinge i en av disse to modene, kan vi ikke ha vilkårlige initialbetingelser. Vi ser f.eks. at hvis vi skyver begge massene like langt i samme retning og slipper dem, vil systemet svinge i den antisymmetriske moden. Skyves de to massene like langt i hver sin retning, vil det svinge i den symmetriske moden. Den *generelle* svingebevegelsen vil være en *superposisjon* av begge moder:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\ x_2(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) - A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{aligned}$$

Her har vi 4 ubestemte konstanter, A_a, A_s, ϕ_a og ϕ_s, som kan fastlegges hvis vi f.eks. kjenner posisjon og hastighet til hver av massene ved $t = 0$.