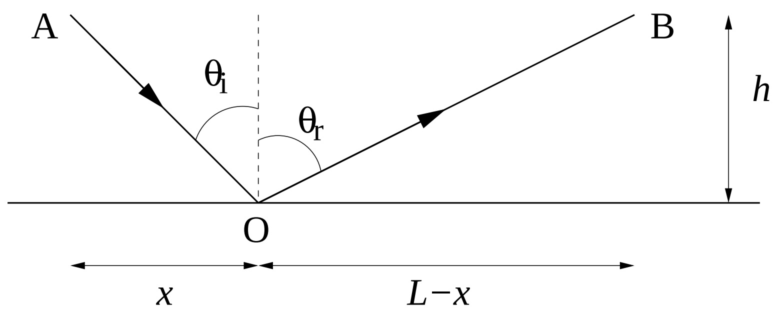
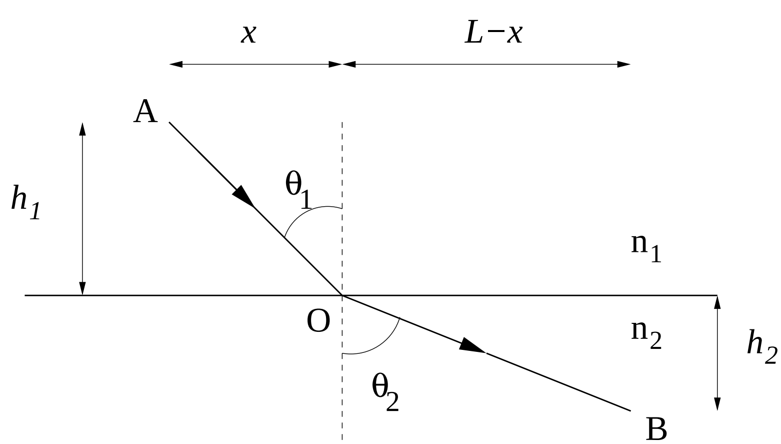
Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1



Figur 1. Fermats prinsipp og refleksjon



Figur 1. Fermats prinsipp og brytning

Fermats prinsipp og refleksjon:

Veistrekningen fra A via O til B er

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(L-x)^2 + h^2}$$

Hele veien ligger i medium 1, slik at lyshastigheten ikke endrer seg. Dermed blir det ett fett om vi minimerer tidsbruken eller veilengden. Vi finner minste veistrekning ved å derivere s mhp x og sette uttrykket lik null:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dx} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}} = 0 \\
\Rightarrow 2x\sqrt{(L-x)^2+h^2} &= 2(L-x)\sqrt{x^2+h^2} \\
\Rightarrow 4x^2(L^2 - 2Lx + x^2 + h^2) &= (4L^2 - 8Lx + 4x^2)(x^2+h^2) \\
\Rightarrow 4L^2h^2 - 8Lxh^2 &= 0 \\
\Rightarrow x &= L/2 \\
\Rightarrow \theta_i &= \theta_r
\end{aligned}$$

Fermats prinsipp og brytning:

Hastighet i medium 1 er v_1 og i medium 2 v_2. Tidsforbruk fra A via O til B blir da

$$t = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}{v_2}$$

Finner minimal tid ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{2(L-x)}{v_2\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}} = 0$$

Vi ser fra figuren at

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$$

mens

$$\sin\theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}$$

Dermed har vi uten videre

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

siden $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$.

Huygens' prinsipp og refleksjon:

Både AB og A'B' er bølgefronter. Da må vi ha AA' = BB'. Vi ser fra figuren i oppgaveteksten at

$$\sin\theta_r = \frac{AA'}{AB'}$$

og at

$$\sin\theta_i = \frac{BB'}{AB'}$$

Men da er

$$\sin\theta_r = \sin\theta_i$$

og

$$\theta_r = \theta_i$$

Huygens' prinsipp og brytning:

Også her er både AB og A'B' bølgefronter. Da må tidsforbruket fra A til A' være like stort som tidsforbruket fra B til B', dvs

$$t_{\mathrm{AA'}} = \frac{AA'}{v_2} = t_{\mathrm{BB'}} = \frac{BB'}{v_1}$$

Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at

$$\sin\theta_1 = \frac{BB'}{AB'}$$

og at

$$\sin\theta_2 = \frac{AA'}{AB'}$$

Dermed:

$$\frac{AB'\sin\theta_2}{v_2} = \frac{AB'\sin\theta_1}{v_1}$$

dvs

$$n_2\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1$$

Oppgave 2

En frekvens 92.3 MHz tilsvarer bølgelengden

$$\lambda = c/\nu = 3.25\,\mathrm{m}$$

Vi har med andre ord $d = \lambda$. Kriteriet for konstruktiv interferens mellom radiobølgene fra de to dipolantennene blir dermed

$$\sin\theta = m$$

som bare kan være oppfylt for $m = 0$, i retning Sverresborg, og for $m = 1$, i retning Ladehammeren. Fra figuren ser vi at retning mot Ila tilsvarer en vinkel $\theta \simeq 30°$. Kriteriet for destruktiv interferens er nettopp

$$\sin\theta = m + 1/2 = 1/2$$

dvs $\theta = 30°$. Du bør derfor ikke bosette deg i Ila.

Mulige tiltak for å gi intensitet i alle tre retninger:

- Dobbelt så stor avstand mellom antennene, dvs $d = 2\lambda$. Får da konstruktiv interferens nettopp i de tre aktuelle retningene.
- Mange antenner.
- ...

Oppgave 3

Fra figuren ser vi at $b/r = \sin\theta$, dvs $\theta = \arcsin(b/r)$. Da kan vi skrive α som en funksjon av støtparameteren b:

$$\alpha(b) = 4\arcsin\left(\frac{b}{nr}\right) - 2\arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

Verdi av b som gir maksimal α finnes ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{d\alpha}{db} = \frac{4/nr}{\sqrt{1-(b/nr)^2}} - \frac{2/r}{\sqrt{1-(b/r)^2}} = 0$$

som gir

$$\frac{4}{n^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) = 1 - \frac{b^2}{n^2r^2}$$

og dermed

$$b = r\sqrt{(4-n^2)/3}$$