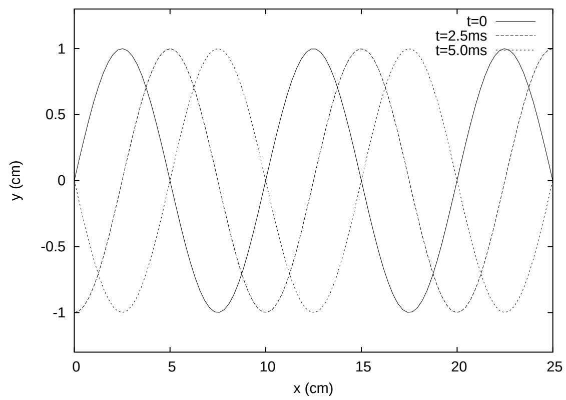
Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

a)

$$y = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{1}$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 10$ ms og $\lambda = 10$ cm.



Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $T = 10$ ms.

c) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $\lambda = 10$ cm.

d) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10\,\mathrm{m}}{0.010\,\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{m/s}$$

Hastigheten til strengelementene (i y-retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = -\omega A\cos(kx - \omega t). \tag{2}$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengelement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m/s} \approx 6.3\,\mathrm{m/s}$$

e)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = \left(200\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 3.9 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}^2.$$

f) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A\cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A\sin(kx - \omega t)$.

<u>Merknad:</u> Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned}
y &= A\sin(kx - \omega t) \\
v_p &= -\omega A\cos(kx - \omega t) = -\omega A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \omega A\sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A\sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
a &= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = \omega^2 A\sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A\sin[kx - (\omega t + \pi)].
\end{aligned}$$

Med andre ord så sier vi at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y.

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_1 + y_2 \\
&= A\cos(kx - \omega t + \phi_1) + A\cos(kx - \omega t + \phi_2) \\
&= 2A\cos\frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= 2A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= A_3\cos(kx - \omega t + \phi_3) \qquad (4)
\end{aligned}$$

der vi har satt

$$\begin{aligned}
A_3 &\equiv 2A\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A\cos\frac{\Delta\phi}{2} \qquad (5) \\
\phi_3 &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left|\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $|A_3|^{\max} = 2A$ (Bølgene adderes i fase.)

$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos\frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n+1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = (2n+1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $|A_3|^{\min} = 0$ (Bølgene adderes i motfase.)

Oppgave 3

a) Vi har:

$$\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2}. \tag{7}$$

og

$$\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

(7) + (8) gir (siden partiell derivasjon er en lineær operasjon):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2[D_1(x,t) + D_2(x,t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2[D_1(x,t) + D_2(x,t)]}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

b) Vi betrakter først $f(x - vt)$ og setter $\xi = x - vt$. Vi får da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = -v\frac{\partial f}{\partial \xi} \tag{10}$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -v\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{11}$$

eller

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{12}$$

Helt tilsvarende (da $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$) får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{13}$$

(12) og (13) gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{14}$$

som viser at $f(x - vt)$ oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

På helt tilsvarende vis (bortsett fra at vi ikke får minustegn foran v som i (10) og (11)) får vi:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \tag{15}$$

Punkt a og lign. (14) og (15) gir da at:

$$D(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.