TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1
a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17\text{m/s}$$

Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens.

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \simeq 17\text{m}$$

Ettersom λ er omvendt proporsjonal med ν, vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m.

c) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0,t) = A\cos(-\omega t + \phi) = A\cos\omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$

$$y(5.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med t målt i sekunder. Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$

Oppgave 2

a)

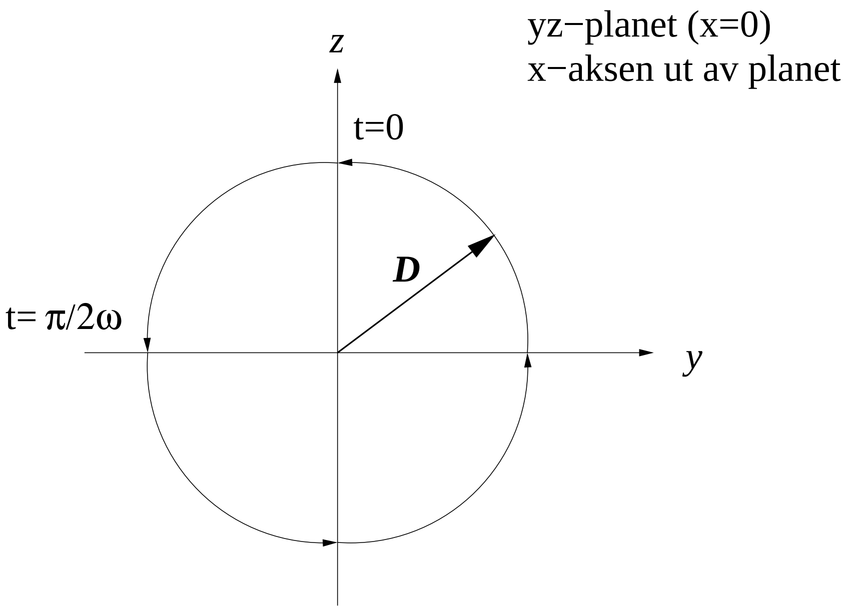
$$\begin{aligned} |\vec{D}| &= D_0 \left[\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)\right]^{1/2} \\ &= D_0 \end{aligned}$$

for alle x og t. Med andre ord, vi har overalt og til enhver tid et utsving med konstant amplitude D_0. Dette betyr at spissen på vektoren $\vec{D}$ alltid ligger på en sirkel med radius D_0. Siden både D_z og D_y kontinuerlig gjennomløper alle verdier mellom $-D_0$ og $+D_0$, må $\vec{D}$ kontinuerlig gjennomløpe alle punkter på sirkelen. Dvs at bølgen er sirkulærpolarisert.

b)

$$\begin{aligned} D_z &= D_0 \cos(kx - \omega t) = D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_y &= D_0 \sin(kx - \omega t) = D_0 \cos(kx - \omega t - \pi/2) \\ &= D_0 \cos\left[(\omega t + \pi/2) - kx\right] \end{aligned}$$

Dette betyr at for alle verdier av x ligger D_y faseforskjøvet $\pi/2$ foran D_z. F.eks. vil D_y nå sin maksimalverdi $+D_0$ en fase $\pi/2$ tidligere enn D_z. Når $D_y = +D_0$, er $D_z = 0$, og $D_y = 0$ nr $D_z = +D_0$. Dvs at vi for enhver verdi av x (f.eks. $x = 0$) har en situasjon som skissert nedenfor:



Bølgen forplanter seg i positiv x-retning. Vi ser derfor av skissen ovenfor at $\vec{D}$ roterer mot urviseren for en observatør som ser mot bølgens forplantningsretning. Bølgen er altså venstre-sirkulærpolarisert.

c) Skal vi ha en bølge som er høyre-sirkulærpolarisert, må vi la D_z ligge en fase $\pi/2$ foran D_y. Det får vi ved f.eks.

$$D_z = D_0 \sin(kx - \omega t)$$

og

$$D_y = D_0 \cos(kx - \omega t)$$

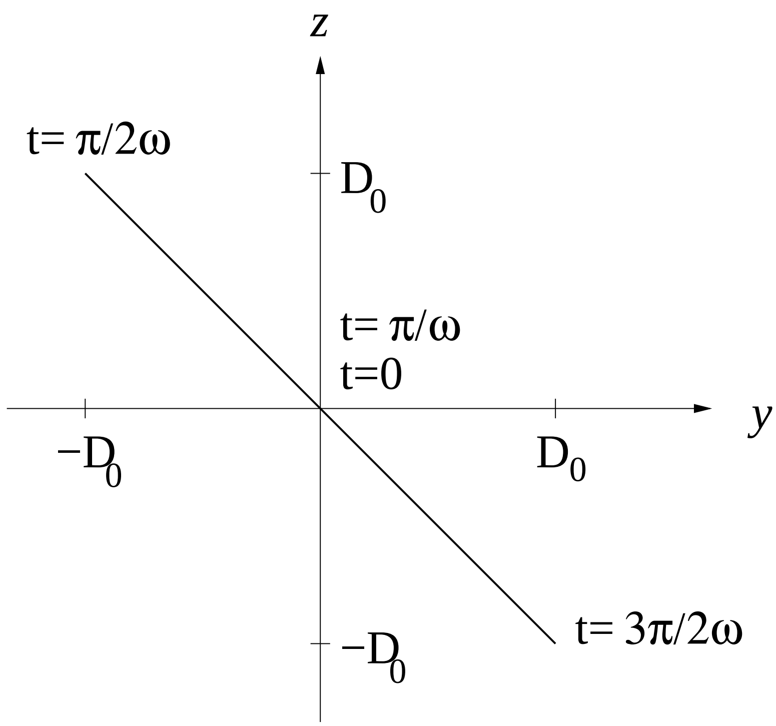
d) Vi har at

$$\sin(kx - \omega t + \pi) = -\sin(kx - \omega t)$$

slik at for bølgen beskrevet ved

$$\boldsymbol{D} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi)\hat{z}$$

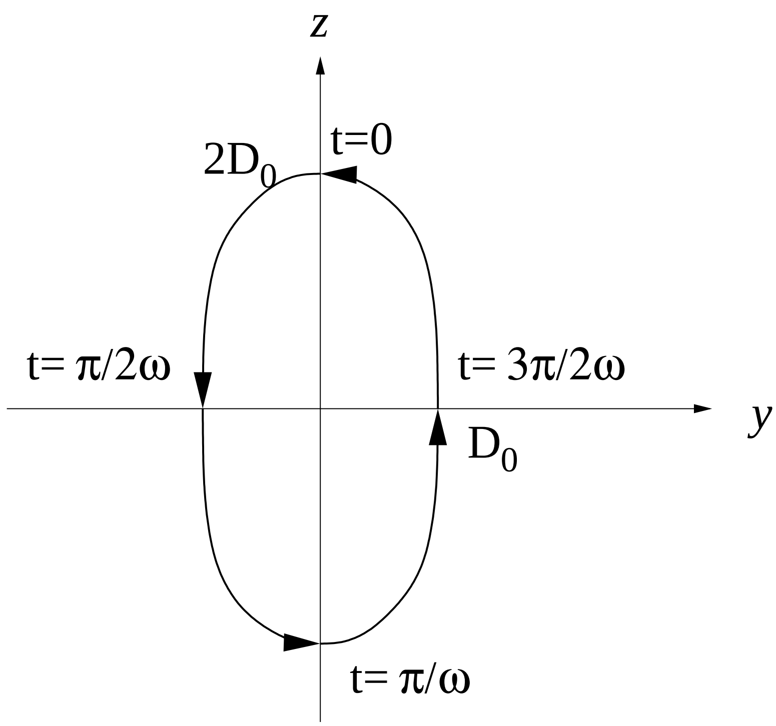
vil vi ha like stor $y-$ og $z-$komponent, men med motsatt fortegn. Det skulle da bli følgende rette linje i yz-planet ($z = -y$):



For bølgen beskrevet ved

$$\boldsymbol{D} = D_y\,\hat{y} + D_z\,\hat{z} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

får vi en ellipse i yz-planet:



ettersom vi har

$$\left(\frac{D_y}{D_0}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{2D_0}\right)^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

dvs ellipse med akse D_0 i $y-$retning og akse $2D_0$ i $z-$retning.

Oppgave 3

a) Longitudinale utsving på ei slik fjær oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x,t)$ er at den kan skrives på formen $f(x-vt)$ eller $g(x+vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($f(x-vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs fjæra. Bølgen propagerer i positiv x-retning.

b) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m/s}$$

som er det vi skal ha.

c) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x, 0)\, dx$ på intervallet $(x, x + dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, 0)\, dx$$

Her inngår størrelsen $d\xi/dX = d\xi/dx$, og med $t = 0$ har vi

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2}$$

som gir

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2} \frac{2x^2}{a^2} e^{-2x^2/a^2}$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a\, d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

som skulle vises.