# Løsningsforslag til øving 5

**Oppgave 1**

*a*) Innsetting av den antatte løsningen gir

$$\begin{aligned}
\xi(x+d)-\xi(x) &= \xi_0\left[\sin(kx+kd-\omega t)-\sin(kx-\omega t)\right] \\
&= \xi_0\cdot 2\cos\frac{kx+kd-\omega t+kx-\omega t}{2}\,\sin\frac{kx+kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
&= 2\xi_0\cos(kx-\omega t+\frac{kd}{2})\,\sin\frac{kd}{2} \\
\xi(x-d)-\xi(x) &= \xi_0\left[\sin(kx-kd-\omega t)-\sin(kx-\omega t)\right] \\
&= \xi_0\cdot 2\cos\frac{kx-kd-\omega t+kx-\omega t}{2}\,\sin\frac{kx-kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
&= -2\xi_0\cos(kx-\omega t-\frac{kd}{2})\,\sin\frac{kd}{2}
\end{aligned}$$

*b*) I neste omgang bestemmer vi høyre side i bevegelsesligningen oppgitt i oppgaveteksten ved å legge de to uttrykkene i punkt $a$ sammen. Vi benytter oss av de trigonometriske relasjonene

$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

og får

$$\begin{aligned}
\xi(x+d)+\xi(x-d)-2\xi(x) &= 2\xi_0\sin\frac{kd}{2}\left[\cos(kx-\omega t+\frac{kd}{2})-\cos(kx-\omega t-\frac{kd}{2})\right] \\
&= 2\xi_0\sin\frac{kd}{2}[\cos(kx-\omega t)\cos\frac{kd}{2}-\sin(kx-\omega t)\sin\frac{kd}{2} \\
&\quad -\cos(kx-\omega t)\cos\frac{kd}{2}-\sin(kx-\omega t)\sin\frac{kd}{2}] \\
&= -4\xi_0\sin^2\frac{kd}{2}\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Her har vi også brukt at $\sin a=-\sin(-a)$ og $\cos a=\cos(-a)$. På venstre side av bevegelsesligningen inngår den andrederiverte av $\xi$ med hensyn på $t$:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi_0\sin(kx-\omega t)$$

Vi setter alt sammen inn i bevegelsesligningen, forkorter felles faktor $\xi_0$ og $\sin(kx-\omega t)$ på begge sider, og får

$$-m\omega^2=-4s\sin^2\frac{kd}{2}$$

dvs

$$\omega^2=\frac{4s}{m}\sin^2\frac{kd}{2}$$

som vi skulle vise.

*c*) Når $kd \ll 1$, kan vi sette

$$\sin^2 \frac{kd}{2} \simeq \frac{k^2 d^2}{4}$$

slik at

$$\omega^2 \simeq \frac{4s}{m} \cdot \frac{k^2 d^2}{4} = \frac{sk^2 d^2}{m}$$

som gir

$$v = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

dvs uavhengig av bølgelengden (og bølgetallet).

*d*) Lydens hastighet i metaller har vi sett eksempler på i forelesningene. La oss si at bølgehastigheten er omtrent 1000 m/s. Det hørbare området dekker frekvenser mellom ca 20 og 20000 Hz, som dermed tilsvarer bølgelengder

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

i området mellom 5 cm og 50 m. Dette er uansett veldig mye mer enn typiske avstander mellom naboatomer i en krystall (mindre enn 1 nm), så for hørbar lyd er tilnærmelsen $kd \ll 1$, eventuelt $\lambda \gg d$ godt oppfylt.

**Oppgave 2**

*a*) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av $k$, dvs for lange bølgelengder.

*b*) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i $S$ til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S + \Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1 + \Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + \Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 + \Delta S/2S) = v \cdot (1 + \Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v\Delta S/2S$$

$c$) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i $\mu$ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu + \Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1 + \Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v\Delta\mu/2\mu$$

**Oppgave 3**

$a$) Bølgelengden:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330}{1000}\,\mathrm{m} = 33\,\mathrm{cm}$$

Intensitetsnivået $\beta$ målt i dB er definert ved

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12}$ W/m$^2$. Med $I = 10^{-9}$ W/m$^2$ har vi

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}$$

Intensiteten $I$ tilsvarer en (midlere) effekt $P$ pr flateenhet $A$. Effekten som mottas på en flate med areal 0.5 cm$^2$ blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9} \text{ W/m}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

(som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.)

$b$) Sammenhengen mellom intensiteten $I$ og utsvingsamplituden $\xi_0$ har vi utledet i forelesningene:

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

Her er $\rho$ massetettheten, $\omega$ er vinkelfrekvensen, og $v$ er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}}\,\mathrm{m} \simeq 0.34\,\mathrm{nm}$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes utstrekning.

Trykkendringen $\Delta p$ er relatert til utsvinget $\xi$ (se forelesningene):

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x,t) = -\gamma p k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$(\Delta p)_0 = \gamma p k \xi_0 = \frac{7}{5} \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9 \text{ mPa}$$

Relativ trykkvariasjon i forhold til likevektstrykket $p$ blir

$$\frac{(\Delta p)_0}{p} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{10^5} = 9 \cdot 10^{-9}$$

Ikke rare greiene!

$c$) Fra tilstandsligningen for ideell gass, $pV = Nk_BT$ får vi

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \Delta \left( \frac{Nk_BT}{V} \right) \\
&= \frac{Nk_B}{V} \Delta T - Nk_BT \frac{\Delta V}{V^2} \\
&= \frac{Nk_BT}{V} \frac{\Delta T}{T} - \frac{Nk_BT}{V} \frac{\Delta V}{V} \\
&= p \frac{\Delta T}{T} - p \frac{\Delta V}{V}
\end{aligned}$$

Som ventet: En trykkøkning ($\Delta p > 0$) ledsages både av en temperaturøkning ($\Delta T > 0$) og en volumreduksjon ($\Delta V < 0$). Det som gjenstår er å finne ut hvor store $\Delta T$ og $\Delta V$ er hver for seg. Det får vi til ved å benytte oss av antagelsen om adiabatiske forhold, nemlig

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

Det medfører at

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V}$$

eller

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p}$$

som innsatt i uttrykket ovenfor for $\Delta p$ gir

$$\Delta p = p \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{\gamma} \Delta p$$

og endelig

$$\frac{\Delta T}{T} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\Delta p}{p}$$

Med andre ord: Temperaturvariasjonen $\Delta T(x,t)$ forplanter seg, på tilsvarende vis som $\Delta p(x,t)$, som en bølge med amplitude

$$(\Delta T)_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}(\Delta p)_0$$

Den relative temperaturvariasjonen blir

$$\frac{(\Delta T)_0}{T} = \left(1 - \frac{5}{7}\right)\cdot 9\cdot 10^{-9} \simeq 3\cdot 10^{-9}$$

Absolutt temperaturvariasjon blir

$$(\Delta T)_0 \simeq 1\mu\mathrm{K}$$

Heller ikke rare greiene.