TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

a) B

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 10\log\frac{I_1}{I_0} \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\
\beta_2 &= 10\log\frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} + \frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\
\Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16
\end{aligned}
$$

b) C

Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden (se f.eks. oppgave 1b). Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$
\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78
$$

c) D

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A_{\text{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0\ \text{mW/m}^2 \\
\Rightarrow \beta &= 10\log\frac{2.0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93\ \text{dB}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Litt repetisjon: Generelt er hastigheten til mekaniske bølger gitt ved

$$
v = \sqrt{\frac{\text{mediets elastiske modul}}{\text{mediets massetetthet}}}
$$

Lydhastigheten i en gass er dermed i utgangspunktet gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

der B er gassens bulkmodul [N/m^2] og ρ er gassens massetetthet [kg/m^3]. I forelesningene viste vi at for en ideell gass under adiabatiske forhold (ingen utveksling av varme - *det* foregår typisk veldig langsomt i forhold til hvor fort lyden forplanter seg) kan bulkmodulen uttrykkes ved hjelp av trykket p og den såkalte *adiabatkonstanten* $\gamma \equiv C_p/C_V$:

$$B = \gamma p$$

Her er $C_p = (dQ/dT)_p$ gassens varmekapasitet (evt. spesifikk varme) når trykket p holdes konstant, mens $C_V = (dQ/dT)_V$ tilsvarende er varmekapasiteten når volumet V holdes konstant. Symbolet Q angir varme, mens T er temperaturen. For gasser med en-atomige molekyler er $\gamma = 5/3$, og for gasser med to-atomige molekyler er $\gamma = 7/5$. Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

For ideell gass har vi sammenhengen

$$pV = N k_B T$$

mellom gassens trykk p, volum V, temperatur T og antall molekyler N. ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant) Massetettheten kan skrives $\rho = m \cdot N/V$, der m er molekylmassen. Dermed kan lydhastigheten også uttrykkes ved

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

Vi har her $T = 303$ K og molekylmasse

$$m = 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq 6.68 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{5 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 303}{3 \cdot 6.68 \cdot 10^{-26}}} \simeq 323 \text{ m/s}$$

Dette er ikke langt unna den målte verdien 324.37 m/s, så det tyder på at antagelsene om ideell gass og adiabatiske forhold er gode.

b) Dersom trykket i gassen økes fra 1 til 2 atm uten at temperaturen endres, vil eksperimentet gi uendret lydhastighet, ettersom $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$, dvs egentlig bare avhengig av temperaturen. Dersom trykket i gassen økes fra p_1 til $p_2 = 2p_1$ uten at varme utveksles med omgivelsene (dvs adiabatisk), vil både temperaturen T og massetettheten ρ øke. Vi kan starte med å finne det nye volumet V_2 (dvs: det volumet som ved trykk $p_2 = 2$ atm okkuperes av like mange molekyler

N som ved $p_1 = 1$ atm okkuperte et volum V_1). Vi bruker antagelsen om adiabatiske forhold, $pV^\gamma =$ konstant:

$$
\begin{aligned}
p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\
p_1 V_1^\gamma &= 2 p_1 V_2^\gamma \\
V_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} V_1 \simeq 0.66 V_1
\end{aligned}
$$

Ny temperatur T_2 blir dermed

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{p_2 V_2}{N k_B} \\
&= \frac{2p_1 \cdot 0.66 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 \frac{p_1 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 T_1
\end{aligned}
$$

Molekylmassen har ikke endret seg, så den nye lydhastigheten blir

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T_2}{m}} \\
&= \sqrt{1.32} v_1 \\
&= 372.60 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$:

$$
\begin{aligned}
S(r) &= \int a\, dm = \int_r^L \omega^2 r' \frac{M}{L} dr' \\
&= \frac{\omega^2 M}{2L} \left(L^2 - r^2\right)
\end{aligned}
$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$
v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T} \sqrt{L^2 - r^2}
$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int \frac{dr'}{v} \\
&= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\
&= \frac{T}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

der integralet enten kan finnes i Rottmann, eller løses ved f.eks. å substitutere $r' = L\sin\alpha$, slik at $dr' = L\cos\alpha d\alpha$ og $\sqrt{L^2 - r'^2} = \cos\alpha$. Legg merke til at vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T, ikke av lengden L eller massen M. Det kunne vi ha slått fast fra starten av, med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T, M og L. Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekune) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T.

Oppgave 4

a) Lydhastigheten er

$$v_s = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma k_B T/M}$$

der adiabatkonstanten er $\gamma = 7/5 = 1.4$ for en gass med toatomige molekyler, og vi har brukt tilstandsligningen $pV = Nk_BT$, evt $p = \rho k_B T/M$ for ideell gass. Midlere kinetiske energi for molekylene i gassen er oppgitt å være $(3/2)k_BT$, dvs

$$\frac{1}{2}M\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_BT$$

Her er $\langle v^2\rangle$ middelverdien av kvadratet av molekylenes hastighet $\boldsymbol{v}$. Det er ingenting spesielt med z-retningen, så vi må ha

$$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$$

med andre ord

$$v_z = \sqrt{\langle v^2\rangle/3} = \sqrt{k_BT/M}$$

Forskjellen mellom v_s og v_z er altså kun en faktor av størrelsesorden 1, helt presist $\sqrt{\gamma} \simeq 1.2$.

b) Vi skal her prøve å finne ut hva som skal til for at antagelsen om adiabatiske forhold *ikke* er en god antagelse. Da må vi ha en varmestrøm over en lengde tilsvarende en halv bølgelengde i løpet av en tid som er kortere eller sammenlignbar med en halv periode av lydbølgen. Med andre ord, vi må ha

$$v_T \geq \frac{\lambda/2}{T/2} = v_s$$

der v_T angir hastigheten til varmestrømmen. Hvis vi antar, som sagt i oppgaveteksten, at utveksling av varme skjer ved at raske molekyler kolliderer med langsommere molekyler, kan det ved første øyekast se ut som om varmestrømmens hastighet kunne være av samme størrelsesorden som lydhastigheten: Et gitt molekyl har, i henhold til punkt *a*), en midlere hastighet i z-retningen omtrent lik $\sqrt{k_BT/M}$, og det er jo omtrent det samme som lydhastigheten v_s. Riktig raske molekyler skulle da ha enda litt større hastighet, og burde kunne rekke fram til der de langsomme befinner seg (en halv bølgelengde unna) og bidra til varmeutveksling før varme og kalde områder har "byttet plass" (dvs innen en halv periode).
Men vi må huske på at molekylene kolliderer ustanselig med hverandre. Volumet tilgjengelig per molekyl er $k_BT/p \sim 4 \cdot 10^{-26}$ m^3, slik at avstanden til nærmeste molekyl bare er noen få nanometer, og gjennomsnittlig strekning som et gitt molekyl beveger seg mellom to påfølgende kollisjoner er av størrelsesorden 10^{-5} cm. ("Midlere fri veilengde", s, avhenger av antall molekyler pr volumenhet,n, samt tverrsnittet på molekylene, σ: $s \sim 1/n\sigma$, der $n \sim 10^{25}$ m^{-3} og

$\sigma \sim 10^{-18}$ m^2. Disse detaljene går langt utover det vi har snakket om i forelesningene, men det bør være opplagt at midlere fri veilengde mellom kollisjoner må være liten i forhold til f.eks. en centimeter.) Høyeste hørbare frekvenser ligger rundt 20000 Hz. Det tilsvarer en bølgelengde $330/20000 \sim 0.017$ m $= 1.7$ cm. Det betyr at molekylene kolliderer *mange* ganger før de har tilbakelagt en strekning som tilsvarer en halv bølgelengde for lyden, og gassen har ingen mulighet for å utveksle varme raskt nok. Konklusjon: Antagelsen om adiabatiske forhold *er* en god antagelse!