Løsningsforslag til øving 9

Oppgave 1

$$
\begin{aligned}
& \nabla \cdot \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{a} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
= & -(\hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z) \cdot \boldsymbol{a} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
= & -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \nabla \times \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & \hat{x}\frac{\partial}{\partial y} a_z \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{x}\frac{\partial}{\partial z} a_y \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
& + \hat{y}\frac{\partial}{\partial z} a_x \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{y}\frac{\partial}{\partial x} a_z \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
& + \hat{z}\frac{\partial}{\partial x} a_y \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{z}\frac{\partial}{\partial y} a_x \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & -[\hat{x}(k_y a_z - k_z a_y) + \hat{y}(k_z a_x - k_x a_z) + \hat{z}(k_x a_y - k_y a_x)] \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

Helt generelt vil vi ha, for en elektromagnetisk bølge som forplanter seg i retning $\hat{k}$ og som er polarisert i retning $\hat{n}$ (med $\hat{n} \perp \hat{k}$):

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

Alternativt kunne vi selvsagt ha brukt sinus i stedet for cosinus. Ettersom $c = \omega/k$, der $k = |\boldsymbol{k}|$ (slik at $\boldsymbol{k} = k\hat{k}$), kan vi også skrive

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos[\omega(t - \hat{k} \cdot \boldsymbol{r}/c)]$$

I kartesiske koordinater er $\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ kan deretter bestemmes ved hjelp av relasjonen som vi utledet fra Faraday-Henrys lov, nemlig

$$\omega \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

eller

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E}$$

a) Forplantning i negativ z-retning betyr at $\hat{k} = -\hat{z}$. Polarisering i y-retning betyr at $\hat{n} = \hat{y}$. Dermed:

$$\boldsymbol{E} = \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)]$$

(Merk at fasen $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t$ innbefatter alle mulige retninger i rommet, slik at fortegnet som angir forplantning i positiv eller negativ retning i det endimensjonale tilfellet kommer automatisk ut på riktig måte.) Det tilhørende magnetfeltet er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E} \\
&= \frac{1}{c} (-\hat{z}) \times \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)] \\
&= \hat{x} \frac{E_0}{c} \cos[\omega(t + z/c)]
\end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned}
k_x = k_y = 0 \quad &, \quad k_z = -\frac{\omega}{c} \\
n_x = n_z = 0 \quad &, \quad n_y = 1
\end{aligned}$$

b) Forplantning i retning $(1, 1, 1)$ betyr at vi kan skrive

$$\boldsymbol{k} = a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Samtidig har vi $k = \omega/c$ slik at

$$\frac{\omega}{c} = a\sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}a$$

dvs $a = \omega/\sqrt{3}c$. Dermed:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

og

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Polarisering i et plan parallelt med xy-planet betyr at vi kan skrive

$$\hat{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y}$$

Gauss' lov brukte vi til å vise at $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, som her betyr at $\hat{k} \cdot \hat{n} = 0$, og som gir

$$(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \cdot (n_x \hat{x} + n_y \hat{y}) = n_x + n_y = 0$$

dvs $n_y = -n_x$. Ettersom $|\hat{n}| = 1$, finner vi $n_x = 1/\sqrt{2}$ og $n_y = -1/\sqrt{2}$ (eller omvendt, hvis du foretrekker det). Alt i alt:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x + y + z}{\sqrt{3}c}\right)\right]$$

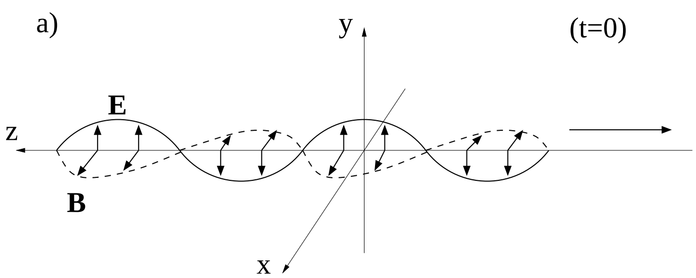
Det tilhørende magnetfeltet blir

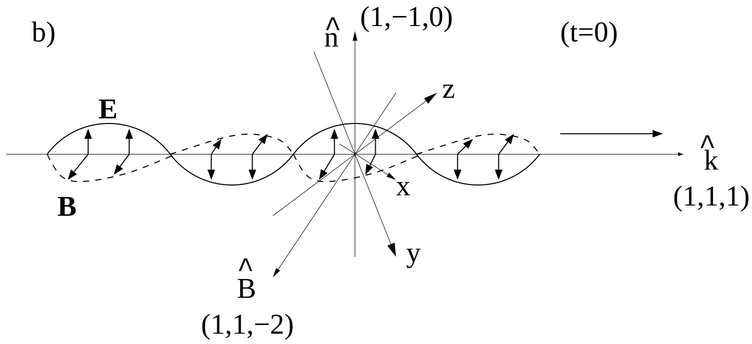
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\hat{k} \times \boldsymbol{E} \\
&= \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right] \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{6}c}(\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z}) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$
\begin{aligned}
k_x &= k_y = k_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} \\
n_x &= -n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ n_z = 0
\end{aligned}
$$

Oppgaven spurte ikke om noen figur, men vi tar den med her likevel:





Oppgave 3

Hvis flaten absorberer all strålingen fullstendig, overføres all strålingens impuls til flaten. Dermed:

$$
P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{1.3}{3} \cdot 10^{-5}\ \text{N/m}^2
$$

Hvis flaten reflekterer all strålingen fullstendig, blir impulsoverføringen dobbelt så stor. Dermed:

$$
P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \cdot 1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{2.6}{3} \cdot 10^{-5}\ \text{N/m}^2
$$

Det atmosfæriske trykket er $P_{\text{atm}} = 10^5$ N/m^2. Det betyr at strålingstrykket fra sola er forsvinnende lite i forhold:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{atm}}} \sim 10^{-10}$$

Oppgave 4

Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)]\, \hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

Med hensyn til retninger, kan vi tenke oss at vi befinner oss i en posisjon på et kuleskall med radius r, slik at z-aksen går gjennom sentrum av kula, fra sørpol til nordpol. Dermed peker $\hat{\theta}$ sørover og $\hat{\phi}$ østover, slik at kryssproduktet mellom disse to blir en enhetsvektor som peker radielt utover, dvs $\hat{r}$. Altså:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)]\, \hat{r}$$

Strålingsintensiteten får vi ved å ta et tidsmiddel over en periode av Poyntings vektor. Her er det bare faktoren $\cos^2[\omega(t - r/c)]$ som avhenger av tiden, og ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, samt at middelverdien av $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ over en periode må være like store, har vi umiddelbart at $\langle \cos^2 x\rangle = \langle \sin^2 x\rangle = 1/2$. Følgelig:

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2}\, \hat{r}$$

(I oppgaveteksten er intensiteten $I(\boldsymbol{r})$ gitt som en *vektor*, hvilket ikke er riktig; intensitet er en skalar størrelse.)
Total utstrålt energi pr tidsenhet finner vi ved å legge sammen bidragene utsendt gjennom alle biter $d\boldsymbol{A}$ av ei hel kuleflate med radius r. Dvs:

$$\langle P \rangle = \oint \langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot d\boldsymbol{A}$$

Her er

$$d\boldsymbol{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \hat{r}$$

se Rottmann eller elmagkurset fra i vår. Dermed:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

Integralet over ϕ gir rett og slett en faktor 2π. Integralet over θ kan vi sikkert finne i Rottmann. Alternativt kan vi skrive om:

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^3 \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2i}\left[e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\sin 3\theta - 3\sin\theta\right]
\end{aligned}$$

Og nå klarer vi å integrere:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta &= -\frac{1}{4}\int_0^\pi \left[\sin 3\theta - 3\sin\theta\right]\, d\theta \\ &= -\frac{1}{4}\Big|_0^\pi \left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta + 3\cos\theta\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 3 - 3\right] \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Total utstrålt effekt blir dermed

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

som vi skulle vise.