**Institutt for fysikk, NTNU**
**FY1002/TFY4160 Bølgefysikk**
**Høst 2007**

# Midtsemesterprøve Bølgefysikk
Fredag 12. oktober 2007 kl 1215 – 1400.

LØSNINGSFORSLAG

---

1) En masse er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger med vinkelfrekvens $\omega$. Ved et bestemt tidspunkt er fjæra strukket en lengde $x_0$ og massens hastighet er da null. Hva er massens maksimale hastighet?

A $\omega x_0$

---

Når hastigheten er null, er potensiell energi lik total energi: $E = kx_0^2/2 = m\omega^2 x_0^2/2$. Maksimal hastighet når $E_p = 0$ og kinetisk energi lik total energi: $E_k = mv^2/2 = E = m\omega^2 x_0^2/2$, som gir $v = \omega x_0$.

---

2) En masse $m$ er festet til ei fjær med fjærkonstant $k$ og utfører dempede svingninger. Friksjonskraften er $b \cdot v$, der $v$ er massens hastighet og $b$ er en dempingskonstant. Dersom vi har *svak* demping, vil massen svinge fram og tilbake med periode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - b^2/4m^2}}$$

Hva blir da svingeperioden for kondensatorladningen $q$ (og strømmen $I$) i en elektrisk krets bestående av en motstand $R$, en kapasitans $C$ og en induktans $L$ koblet i serie (når motstanden $R$ er forholdsvis liten)?
Oppgitt:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

D $T = (4\pi L/R)/\sqrt{4L/CR^2 - 1}$

---

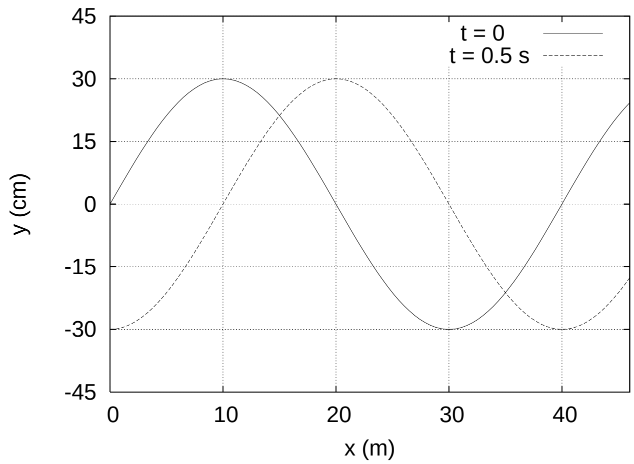
Bevegelsesligning for massen:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Finner da $T$ for $RLC$-kretsen ved å erstatte $m$ med $L$, $b$ med $R$ og $k$ med $1/C$. Innsetting og ordning på uttrykket gir alternativ D.

---

Figur 1:




Figur 1 gjelder oppgavene 3-6 og viser to øyeblikksbilder av (en del av) en harmonisk transversal bølge som forplanter seg i positiv $x$-retning på en streng.

---

3) Hva kan bølgens hastighet være?

C 100 m/s

---

Forflytning av bølgen mellom $t = 0$ og $t = 0.5$ s er, fra figuren, $x = 10 + 40n$ m ettersom bølgelengden er $\lambda = 40$ m ($n = 0, 1, ...$). Bølgens hastighet er dermed $v = 20 + 80n$ m/s. Av de gitte alternativene passer kun $v = 100$ m/s, for $n = 1$.

---

4) Hva er tilhørende frekvens?

D 2.5 Hz

---

Vi har $v = \lambda/T = \lambda\nu$, dvs $\nu = v/\lambda = 100/40 = 2.5$ Hz.

---

5) Hva er strengelementenes maksimale hastighet?

D 4.7 m/s

---

Derivasjon av utsvinget $y(x, t)$ med hensyn på tiden $t$ gir en hastighetsamplitude $\omega y_0$ for den vertikale bevegelsen. Maksimal vertikal hastighet er derfor $2\pi \cdot 2.5 \cdot 0.30$ m/s $= 4.7$ m/s.

---

6) Bølgen kan beskrives ved funksjonen $y_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$. Hva er da fasekonstanten $\phi$?

A $\phi = 0$

---

Vi ser av figuren av $y(0, 0) = 0$. Dermed er $\phi = 0$.

---

7) Hva er lydhastigheten i hydrogengass ($H_2$) ved romtemperatur (300 K)? Et hydrogenatom har ett proton i kjernen (og ingen nøytroner).

C 1317 m/s

Bruker oppgitt formel:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}} = 1317 \text{ m/s}$$

8) En sommerdag synker plutselig temperaturen fra 300 K til 298 K. Hvor mye endres da lydhastigheten?

B $-0.3$ %

$v(T) = aT^{1/2}$ som gir $\Delta v = (1/2)aT^{-1/2}\Delta T$, dvs $\Delta v/v = (1/2)\Delta T/T = (1/2) \cdot (-2)/300 \simeq -0.003$, dvs $-0.3$ %.

9) En liten høyttaler sender ut lydbølger med like stor intensitet i alle retninger. Dersom du måler et intensitetsnivå på 80 dB i en avstand 40 m fra høyttaleren, hva er da intensitetsnivået 5 m fra høyttaleren?

A 98 dB

Utstrålt effekt må være like stor gjennom et hvilket som helst kuleskall med sentrum på høyttaleren, dvs intensiteten må avta med kvadratet av avstanden. Dermed: $I_5/I_{40} = 40^2/5^2 = 64$. Vi har 80 (dB) $= 10\log(I_{40}/I_0) = 10\log I_{40} - 10\log I_0$, mens intensitetsnivået i avstand 5 m er $x = 10\log(I_5/I_0) = 10\log(64 I_{40}/I_0) = 10\log 64 + 10\log I_{40} - 10\log I_0$. Dermed: $x = 80 + 10\log 64 = 98$ dB.

10) Den plane bølgen $\xi(\boldsymbol{r}, t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$ forplanter seg

B i samme retning som $\boldsymbol{k}$.

To posisjoner $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{r}'$ i en gitt bølgefront må ha samme fase. Dermed blir $\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0$, dvs $\boldsymbol{k} \perp (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$. Vektoren $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ligger *i* den plane bølgefronten, og bølgens forplantningsretning står normalt på bølgefronten. Følgelig forplanter bølgen seg i samme retning som $\boldsymbol{k}$.

11) Bølgen

$$\boldsymbol{D}(x,t) = D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t) + 3D_0\hat{z}\cos(kx-\omega t)$$

er

D elliptiskpolarisert.

---

Tegn opp (f.eks.) $\boldsymbol{D}(0,t) = -D_0\hat{y}\sin\omega t + 3D_0\hat{z}\cos\omega t$ i $yz$-planet. En ser da at (spissen av) $\boldsymbol{D}(0,t)$ følger en ellipseformet bane.

---

12) En gitarstreng med lengde 75 cm er festet i begge ender. Strekket i strengen er 150 N og massen er 7.2 g. Hva er frekvensen til strengens 2. harmoniske (dvs nest laveste resonansfrekvens)?

D 167 Hz

---

Laveste resonansfrekvens har bølgelengde to ganger strengens lengde, nest laveste resonansfrekvens har bølgelengde lik strengens lengde, dvs $\lambda_2 = L$. Nest laveste resonansfrekvens blir dermed

$$\nu_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{S}{Lm}} = \sqrt{\frac{150}{0.75\cdot 0.0072}} = 167 \text{ Hz}$$

---

13) To biler kjører rett fra hverandre, bil nr 1 med hastighet 50 m/s og bil nr 2 med hastighet 5 m/s. Begge bilene er utstyrt med en sirene som genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 500 Hz. Det er vindstille, og været er ellers slik at lydhastigheten denne dagen er $v = 340$ m/s. Hvilken frekvens $\nu_1$ måler bil nr 1 fra sirenen i bil nr 2, og hvilken frekvens $\nu_2$ måler bil nr 2 fra sirenen i bil nr 1?

B $\nu_1 = 420$ Hz og $\nu_2 = 429$ Hz

---

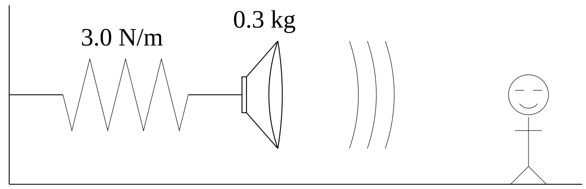
Her er begge biler både kilde (S) og observatør (O), og i begge tilfelle kan vi benytte oppgitt formel for dopplereffekt, med $v_O > 0$ (bort fra S, evt. samme retning som lydbølgen) og $v_S > 0$ (bort fra O, evt. motsatt retning av lydbølgen). Vi får dermed

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{1-50/340}{1+5/340}\cdot 500 = 420 \text{ Hz}\\ \nu_2 &= \frac{1-5/340}{1+50/340}\cdot 500 = 429 \text{ Hz}\end{aligned}$$

---

14) En høyttaler med masse 0.3 kg er festet til ei tilnærmet masseløs fjær med fjærkonstant 3.0 N/m. Høyttaleren svinger harmonisk med amplitude 0.15 m og sender samtidig ut en tone på 800 Hz. Hvis du står rett foran høyttaleren, vil du høre små variasjoner i tonens frekvens. Hva er forskjellen mellom største og minste frekvens du hører? Lydhastigheten er 340 m/s.

B   2.2 Hz




---

Her har vi dopplereffekt med kilden (S) i bevegelse og observatøren (O) i ro. Observert frekvens blir

$$\nu_O = \frac{\nu_S}{1 \pm |v_S|/v}$$

der negativt fortegn i nevneren tilsvarer S i bevegelse mot O (dvs med lydbølgen) og positivt fortegn i nevneren tilsvarer S i bevegelse bort fra O (dvs mot lydbølgen). Maksimal hastighet for høyttaleren er $\omega x_0 = \sqrt{k/m} x_0 = \sqrt{3.0/0.3} \cdot 0.15 = 0.474$ m/s. Maksimal og minimal observert frekvens blir

$$\nu_O = \frac{800}{1 \pm 0.474/340} = 801.12 \text{ eller} 798.89 \text{ Hz}$$

dvs en forskjell på 2.2 Hz.

---

15) Sjokkbølgen fra et jagerfly som flyr horisontalt treffer deg 1.85 s etter at flyet passerte rett over deg. Lydhastigheten er 340 m/s, og flyets hastighet er 2.3 ganger så stor (dvs machtall = 2.3). I hvilken høyde flyr flyet?

A   ca 0.7 km

---

Vinkelen $\alpha$ mellom horisontalen og siktelinjen fra deg til flyet er bestemt ved $\sin\alpha = v/v_S$, der $v$ er lydhastigheten og $v_S = 2.3v$ er flyets hastighet. Hvis flyet flyr i en høyde $h$, har vi også $\cos\alpha = vt/h$, der $t = 1.85$ s er tiden flyet har brukt fra det var rett over deg til der det er når sjokkbølgen treffer deg. Dermed:

$$h = \frac{vt}{\cos\alpha} = \frac{vt}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{340 \cdot 1.85}{\sqrt{1 - 1/2.3^2}} \simeq 0.7 \text{ km}$$

---

16) Et langt, tynt rør som er åpent i den ene enden og lukket i den andre skal brukes til å lage stående lydbølger med frekvens 250 Hz. Dette skal være rørets laveste resonansfrekvens (grunntonen). Hvor langt må da røret være? Lydhastigheten er 340 m/s.

A 34 cm

---

Stående lydbølger i slike rør må ha en node ved den lukkede enden og en antinode (buk) i den åpne enden for utsvingsbølgen $\xi(x,t)$. Laveste resonansfrekvens tilsvarer dermed en bølgelengde $\lambda = 4L$, der $L$ er rørets lengde. Dermed: $L = \lambda/4 = v/4\nu = 340/4 \cdot 250 = 0.34$ m.

---

17) Hva blir tredje laveste resonansfrekvens i røret i forrige oppgave?

D 1250 Hz

---

Nest laveste resonansfrekvens har bølgelengde $3L/4$, mens tredje laveste resonansfrekvens har bølgelengde $4L/5$. Følgelig blir tredje laveste resonansfrekvens 5 ganger så høy som grunntonen, dvs 1250 Hz.

---

18) To like gitarstrenger har litt ulik stramming slik at de svinger med frekvens henholdsvis 440 og 444 Hz (men med like stor amplitude). Hva hører du?

C En tone med frekvens 442 Hz, der intensiteten varierer mellom sterk og svak med periode et kvart sekund.

---

Vi har svevning, med svevefrekvens $\nu_S = |\nu_2 - \nu_1| = 4$ Hz, dvs en sveveperiode $T_S = 1/\nu_S = 0.25$ s. Tonen vi hører har frekvens $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 442$ Hz.

---

19) To harmoniske lydbølger med samme amplitude $\xi_0$ og samme vinkelfrekvens $\omega$ propagerer i positiv $x$-retning. De to lydbølgene er faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til hverandre. Hvis bare en av lydbølgene er til stede, er midlere intensitet $I_0$. Hva er da midlere intensitet med begge lydbølgene til stede samtidig?

C $2I_0$

---

Skriver vi den ene bølgen som $\xi_0 \sin(kx - \omega t)$, kan vi skrive den andre som $\xi_0 \cos(kx - \omega t)$, da de skal være faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til hverandre. Bruker vi oppgitt formel på side 1 i oppgaveteksten, får vi

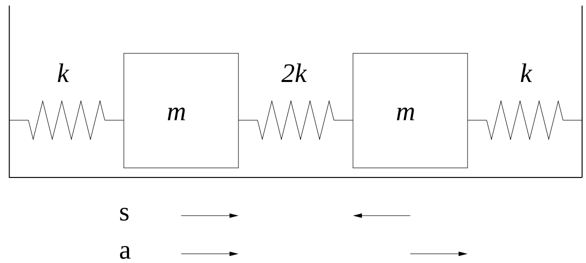
$$\xi(x,t) = \xi_0 \left[\sin(kx - \omega t) + \cos(kx - \omega t)\right] = \sqrt{2}\xi_0 \sin(kx - \omega t + \pi/4)$$

Vi vet at intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden, og ettersom både en av bølgene alene og begge bølgene sammen er sinusbølger med samme frekvens, får vi en intensitet $(\sqrt{2})^2 I_0 = 2I_0$ med begge bølgene til stede samtidig.

---

20) To like store masser $m$ er festet til fjærer med fjærkonstanter $k$ og $2k$ som vist i figuren. De to massene kan svinge i to vibrasjonsmoder ("normale moder"): en "symmetrisk" mode (s) der massenes utsving fra likevekt er like store men med motsatt fortegn og en "antisymmetrisk" mode (a) der massenes utsving fra likevekt er like store og med samme fortegn. De tilhørende vinkelfrekvensene er henholdsvis $\omega_s$ og $\omega_a$. Hva blir forholdet mellom disse, dvs $\omega_s/\omega_a$?

C $\sqrt{5}$




I mode s er fjæra i midten presset sammen en lengde $2\Delta x$ hvis de to andre fjærene er strukket en lengde $\Delta x$. Total kraft på hver av massene blir dermed $k\Delta x + 2k \cdot 2\Delta x = 5k\Delta x$. I mode a er fjæra i midten aldri strukket eller presset sammen, så total kraft på hver av massene blir simpelthen $k\Delta x$. Det betyr at vi i mode s har en "effektiv" fjærkonstant som er 5 ganger så stor som i mode a. Ettersom $\omega$ er proporsjonal med kvadratroten av fjærkonstanten, finner vi at $\omega_s/\omega_a = \sqrt{5}$.

21) En gaussformet bølgepakke

$$\xi(x,t) = \xi_0 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right]$$

vandrer med hastighet $v$ langs en streng med masse $\mu$ pr lengdeenhet. Størrelsen $\xi(x,t)$ representerer det transversale utsvinget av strengen. Hva blir bølgepakkens totale impuls $p$?
Oppgitt:

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-\beta^2} d\beta = 0$$

D $\mu\, \xi_0^2\, (v/a)\sqrt{\pi/2}$

Vi regner ut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{2v}{a^2}\xi_0(x-vt)\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \\
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{2}{a^2}\xi_0(x-vt)\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right]
\end{aligned}$$

Integralet av $\partial\xi/\partial t$ over $x$ fra $-\infty$ til $\infty$ er null fordi integranden er antisymmetrisk. Det ser en eksplisitt ved å substituere $\beta = (x-vt)/a$; da blir integralet på den oppgitte formen. Integralet av

$(\partial\xi/\partial t)(\partial\xi/\partial x)$ er ikke null da det er symmetrisk. Her må vi substituere $\beta = \sqrt{2}(x-vt)/a$ for å få integralet på den oppgitte formen. Da blir $dx = (a/\sqrt{2})d\beta$ mens $(x-vt)^2 = \beta^2 a^2/2$. Vi får:

$$p = \mu \cdot \frac{4v\xi_0^2}{a^4} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \mu\, \xi_0^2\, (v/a)\sqrt{\pi/2}$$

---

22) En stålstang er skjøtt sammen med en kobberstang i en jevn og plan grenseflate. Stål har massetetthet 7800 og Youngs modul $2.0 \cdot 10^{11}$ mens kobber har massetetthet 8900 og Youngs modul $1.1 \cdot 10^{11}$ (alt oppgitt i SI-enheter). En harmonisk lydbølge propagerer langs stålstangen med retning mot grenseflaten. Hva blir forholdet mellom amplituden til lydbølgen som transmitteres inn i kobberstangen og amplituden til innkommende lydbølge?

A  1.12

---

Her er det bare å benytte oppgitt formel:

$$\frac{\xi_{t0}}{\xi_{i0}} = \frac{2\sqrt{7800 \cdot 2.0 \cdot 10^{11}}}{\sqrt{7800 \cdot 2.0 \cdot 10^{11}} + \sqrt{8900 \cdot 1.1 \cdot 10^{11}}} = 1.12$$

---

23) Det er en deilig sommerdag, og du har dratt for å bade. Med et øre over og et øre under vannflaten hører du lyden av en eksplosjon ute på innsjøen. Lydbølgen under vann høres to sekunder før lydbølgen i lufta. Hvor langt er det omtrent fra der du ligger og plasker og ut til eksplosjonsstedet? Vannet har, i SI-enheter, bulkmodul $2.1 \cdot 10^9$ og massetetthet $10^3$. Lydhastigheten i luft er 340 m/s.

B  890 m

---

Vi finner først lydhastigheten i vannet: $v_V = \sqrt{B/\rho} = 1449$ m/s. Tilsvarende i lufta er oppgitt, $v_L = 340$ m/s. Med $t$ = tiden det tok for lydbølgen i vann har vi $v_V t = v_L(t+2)$ som gir $t = 2v_L/(v_V - v_L) = 0.613$ s. Avstanden er derfor $x = v_V t = 1449 \cdot 0.613 = 888$ m.

---

24) En streng med lengde $L$ henger vertikalt i tyngdefeltet. Den øverste halvdelen har masse $\mu_1$ pr lengdeenhet og den nederste halvdelen har masse $3\mu_1$ pr lengdeenhet. En bølgepuls genereres øverst på strengen og vandrer nedover strengen. Hvor stor andel av bølgepulsens energi passerer skjøten midt på strengen og fortsetter videre på den nederste halvdelen?

A  $2\sqrt{3}/(2+\sqrt{3})$

---

Her er det kanskje enklest å regne ut andel energi som reflekteres først, ettersom vi ganske enkelt har

$$R = \left|\frac{\xi_{r0}}{\xi_{i0}}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3+1+2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

for refleksjonskoeffisienten. Andel transmittert energi, gitt ved transmisjonskoeffisienten $T$ blir dermed

$$T = 1 - R = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

25) Hvor lang tid bruker bølgepulsen i forrige oppgave på å vandre hele strengens lengde, fra øverst til nederst? (Tips: Strekket i strengen i en gitt posisjon er bestemt av tyngden av massen nedenfor.)

B $(3-\sqrt{3})\sqrt{2L/g}$

Strekk-kraft nedenfor midten ($y < L/2$): $S(y) = 3\mu_1 y g$. Strekk-kraft ovenfor midten ($y > L/2$): $S(y) = 3\mu_1 g L/2 + \mu_1(y - L/2)g = \mu_1 g(y + L)$. Bølgens hastighet langs strengen blir dermed, nedenfor midten: $v(y) = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{gy}$, og ovenfor midten: $v(y) = \sqrt{g(y+L)}$.
Det tar bølgen en tid $dt = dy/v$ å vandre en lengde $dy$. Her spiller det ingen rolle om vi regner ut tiden for å spasere hele strengens lengde oppover eller nedover, så vi får:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{gy}} + \int_{L/2}^{L} \frac{dy}{\sqrt{g(y+L)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ |_0^{L/2} 2y^{1/2} + |_{L/2}^{L} 2(y+L)^{1/2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2L}{g}} \left( 3 - \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$