Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høsten 2006, uke 36

Mandag 04.09.06

Del II: BØLGER
Innledning
Bølger er forplantning av svingninger. Når en bølge forplanter seg i et materielt medium, *svinger* partikler fram og tilbake omkring en likevektsposisjon, men de *forplanter seg ikke* med bølgen. Det som forplanter seg med en propagerende bølge ("vandrebølge") er *energi* og *impuls* (bevegelsesmengde).

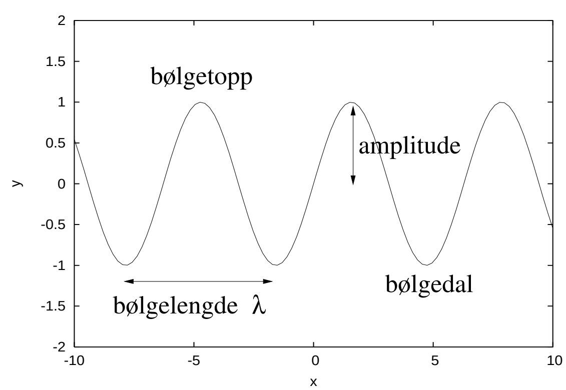
Eksempler på bølger:

Type bølge	Hva svinger?	Svingeretning
Bølger på streng	Strengelementer	Transversal
Bølger i fjær	Fjærelementer	Transversal og/eller longitudinal
Lydbølger	Gassmolekyler (hvis gass)	Longitudinal
Overflatebølger på væske	Væskemolekyler	"Kombinert"
Elektromagnetiske bølger	Elektrisk og magnetisk felt	Transversal

Transversale bølger: svingeretningen står vinkelrett på forplantningsretningen.
Longitudinale bølger: svingeretningen er parallell med forplantningsretningen.

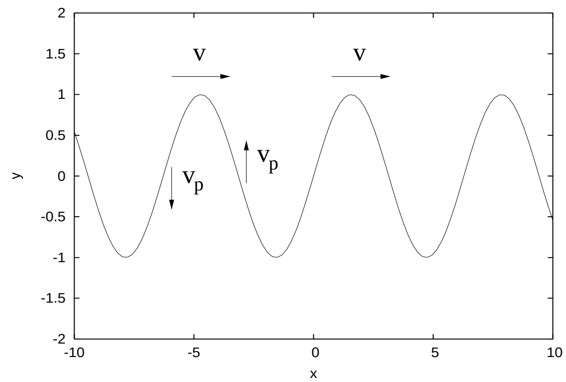
Harmonisk bølge: størrelser og begreper
[FGT 14.3; YF 15.2; TM 15.2; AF 28.3; LL 10.2]

La oss bruke transversal bølge på en uendelig lang streng som eksempel:



Figuren over viser et øyeblikksbilde av en *sinusbølge*, der $y(x,t)$ er utsvinget til strengelementet i posisjon x ved tidspunktet t.
Amplituden er maksimalt utsving fra likevekt ($y = 0$). Pr definisjon er amplituden en positiv størrelse.
Bølgelengden λ er avstanden mellom f.eks. to bølgetopper.
Perioden T er tiden det tar for bølgemønsteret å bevege seg en distanse λ.
Frekvensen $\nu = 1/T$ er antall svingninger pr tidsenhet som observeres hvis vi betrakter utsvinget $y(x_0, t)$ som funksjon av tiden t i en bestemt posisjon x_0.
Hastigheten til bølgen: $v = \Delta x/\Delta t = \lambda/T = \lambda\nu$. Dette er hastigheten til f.eks. en bølgetopp i en uendelig lang sinusbølge. Den kalles gjerne *fasehastigheten* fordi den tilsvarer hastigheten som en bestemt

fase (f.eks. en bølgetopp) av bølgen forplanter seg med. Vi bruker også begrepet *bølgehastigheten* for v.
Partikkelhastigheten, i dette eksemplet $v_p = dy/dt$, har generelt ingen sammenheng med bølgehastigheten v, og er generelt også tallmessig ganske forskjellig fra v.



Dispersjon
Dersom harmoniske bølger med ulik frekvens ν har ulik hastighet v, sier vi at vi har *dispersjon.*

Eksempler på *dispersive* bølger:

- overflatebølger på dypt vann
- elektromagnetiske bølger i faste stoffer

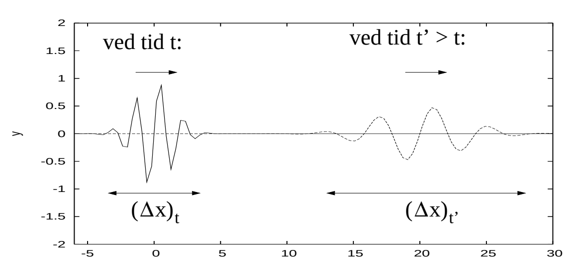
Eksempler på *ikke-dispersive* bølger:

- bølger på streng
- lydbølger
- elektromagnetiske bølger i vakuum

En *ren* sinusbølge med *en* frekvens har *uendelig* utstrekning. Fysiske *bølgetog* (evt. *bølgepakker*) med *endelig* utstrekning består av *flere* sinusbølger med *ulike* frekvenser. (Vi skal komme litt inn på det matematiske grunnlaget for dette senere i kurset, dvs *fourieranalyse.*)

En bølgepakke med bølgehastighet v uavhengig av frekvensen ν vil ikke endre sin form, fordi alle "delbølgene" som bølgepakken er satt sammen av forplanter seg med samme hastighet.

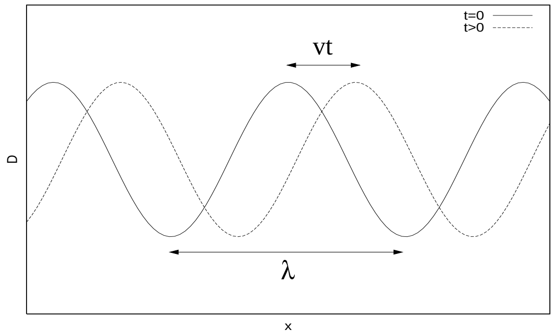
En bølgepakke der v er ulik for ulike ν vil endre sin form og utstrekning, fordi delbølgene som bølgepakken er satt sammen av forplanter seg med ulike hastigheter. Et eksempel er vist i figuren nedenfor:



Matematisk beskrivelse av bølgebevegelse

[FGT 14.3,14.4; YF 15.3; TM 15.2; AF 28.3,28.4; LL 10.2]

Vi betrakter en endimensjonal harmonisk bølge som forplanter seg i positiv $x-$retning:



Utsvinget D ved $t = 0$ kan skrives slik:

$$D(x, t = 0) = D_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Her er D_0 bølgens maksimale utsving, dvs amplituden. Etter en tid $t > 0$ har bølgen forplantet seg en distanse vt i positiv $x-$retning. Dermed kan utsvinget ved tid t skrives slik:

$$D(x, t) = D_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

Fra før vet vi at

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \lambda\frac{\omega}{2\pi}$$

dvs

$$\frac{2\pi}{\lambda} v = \omega$$

Vi innfører nå det såkalte *bølgetallet* (engelsk: wave number)

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

(Alternative navn for k er sirkelrepetens eller angulært bølgetall.) Vi ser at enheten til k må bli m^{-1} (evt. radianer pr m). Vi kan nå skrive

$$D(x, t) = D_0 \cos(kx - \omega t)$$

for en harmonisk bølge som forplanter seg med hastighet

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$$

i positiv $x-$retning.

Dersom utsvinget D er i $x-$retning, har vi en *longitudinal* bølge. Det kan vi "bake inn" matematisk ved å skrive

$$\boldsymbol{D}(x, t) = \hat{x}\, D_0 \cos(kx - \omega t)$$

der $\hat{x}$ som vanlig angir enhetsvektor i $x-$retning.

Dersom utsvinget D står normalt på $x-$retningen, har vi en *transversal* bølge. Det kan vi uttrykke slik, der vi eksempelvis velger utsvinget i $y-$retningen:

$$\boldsymbol{D}(x,t) = \hat{y}\, D_0 \cos(kx - \omega t)$$

Vi har ikke alltid maksimalt utsving i $x = 0$ ved $t = 0$. For en generell harmonisk bølge må vi derfor skrive

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

når den forplanter seg i positiv $x-$retning. Her kalles ϕ for *fasekonstanten.* Tilsvarende, for en harmonisk bølge som forplanter seg i negativ $x-$retning:

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx + \omega t + \phi)$$

Vi kaller

$$kx \pm \omega t + \phi$$

for bølgens *fase.*

Bølgeligning

[FGT 14.2; YF 15.3; TM 15.1; AF 28.4; LL 10.1]

Vi skal etter hvert se at *en og samme ligning* beskriver flere typer bølger. For bølger *uten dispersjon* og *uten demping* har vi:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

Dette er *bølgeligningen* i en dimensjon. Her er v fasehastigheten (evt. bølgehastigheten), og symbolet ∂ står for "partiell derivert" og betyr at vi deriverer med hensyn på en av de variable mens de andre variable holdes fast. Eksempel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos(kx - \omega t) = -k \sin(kx - \omega t)$$

Denne bølgeligningen, som er en 2. ordens partiell differensialligning, beskriver f.eks.:

- transversale bølger på streng, med $D(x,t) =$ utsving for strengelement med posisjon x ved tid t
- lydbølger i en dimensjon, med $D(x,t) =$ avvik fra likevekt i trykk eller tetthet i posisjon x ved tid t (men også her kan D representere partiklers utsving fra en likevektsposisjon)
- elektromagnetiske bølger i en dimensjon i vakuum, med $D(x,t) =$ elektrisk eller magnetisk felt normalt på forplantningsretningen x

Den *generelle løsning* av denne bølgeligningen er:

$$D(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Her er f og g vilkårlige kontinuerlige og to ganger deriverbare funksjoner. Eksempler:

Harmonisk bølge (med $\omega = kv$):

$$D(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

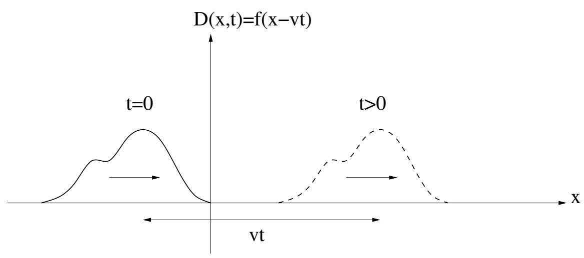
Gaussformet bølgepuls (med a = en konstant med enhet m):

$$D(x,t) = D_0 \exp\left[-\frac{(x+vt)^2}{a^2}\right]$$

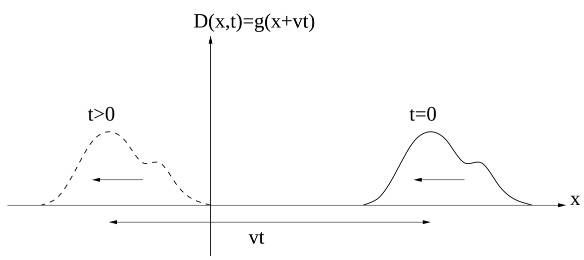
Her er det første eksemplet en bølge som forplanter seg i positiv $x-$retning, mens det andre eksemplet er en bølge som forplanter seg i negativ $x-$retning.

Generelt (i det vi antar at v er en positiv størrelse):

$f(x - vt)$ = bølge som forplanter seg i positiv $x-$retning:



$g(x + vt)$ = bølge som forplanter seg i negativ $x-$retning:



Superposisjonsprinsippet

Dersom $D_1(x,t)$ og $D_2(x,t)$ begge er løsninger av bølgeligningen, er også summen

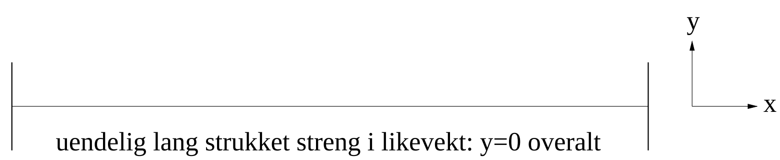
$$D(x,t) = D_1(x,t) + D_2(x,t)$$

en løsning av bølgeligningen. Denne egenskapen gjelder for alle lineære homogene ordinære og partielle differensialligninger.

Transversale bølger på streng

[FGT 14.2; YF 15.4; TM 15.1; AF 28.7; LL 10.1]

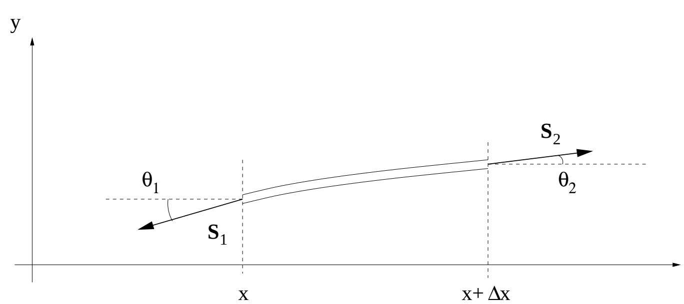
Vi betrakter en streng som er spent opp mellom to faste punkter. Vi antar at strengen er uendelig lang (slik at vi kan snakke om rene harmoniske vandrebølger på strengen).



Antagelser:

- μ = strengens masse pr lengdeenhet [kg/m]
- S = den horisontale strekk-kraften [N]
- $S \gg mg$, som gjør at vi kan se bort fra tyngdekraften
- strengen er fullstendig elastisk (dvs: den får ingen varig deformasjon)
- vi ser på små utsving y
- kun transversal bevegelse av strengelementer

Vi ser på kreftene som virker på en liten bit av strengen, med lengde Δx:



Ingen bevegelse i $x-$retningen må bety at

$$S_{1x} + S_{2x} = 0$$

dvs

$$-S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 = 0$$

Og begge disse leddene må være lik den horisontale strekk-kraften S:

$$S = S_1 \cos\theta_1$$

og

$$S = S_2 \cos\theta_2$$

Newtons 2. lov gir for bevegelsen i $y-$retning:

$$S_{1y} + S_{2y} = m\ddot{y}$$

dvs

$$-S_1 \sin\theta_1 + S_2 \sin\theta_2 = m\ddot{y}$$

Vi dividerer denne ligningen med S:

$$\frac{S_2 \sin\theta_2}{S_2 \cos\theta_2} - \frac{S_1 \sin\theta_1}{S_1 \cos\theta_1} = \frac{m\ddot{y}}{S}$$

dvs

$$\tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \frac{m\ddot{y}}{S}$$

Vi ser fra figuren at $\tan\theta_1 =$ strengens helning ved x og at $\tan\theta_2 =$ strengens helning ved $x + \Delta x$. Og helningen, det er jo det samme som den deriverte av y med hensyn på x. Vi har dermed:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = \frac{\mu \Delta x}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

der vi også har brukt at $m = \mu\Delta x$. Denne ligningen dividerer vi med Δx, hvoretter vi lar $\Delta x \to 0$. Da blir venstre side av ligningen:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \underset{\Delta x \to 0}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

og hele ligningen blir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dermed blir konklusjonen at det transversale utsvinget $y(x,t)$ på en streng som er strukket med en kraft S, og som har masse pr lengdeenhet μ, oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

med (konstant, dvs frekvensuavhengig) bølgehastighet $v = \sqrt{S/\mu}$. Og fra før vet vi at den generelle løsningen av ligningen er

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

der f er en bølge som forplanter seg i postiv $x-$retning, mens g er en bølge som forplanter seg i negativ $x-$retning.

Eksempel:
En streng med masse $m = 222$ g strekkes med en kraft $S = 8.5$ N slik at dens lengde blir 8 m. Hva blir hastigheten til en bølge som forplanter seg langs strengen? Anta at en harmonisk bølge med amplitude 5 cm og frekvens 3 Hz forplanter seg langs strengen. Hva blir strengens maksimale transversale hastighet og akselerasjon?

Løsning:
Strengens massetetthet:

$$\mu = m/L = 222/8 \simeq 28 \text{ g/m}$$

Det gir bølgehastigheten

$$v = \sqrt{8.5/0.028} \simeq 17.5 \text{ m/s}$$

Utsvinget $y(x,t)$ kan beskrives med funksjonen

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

Vertikal hastighet og akselerasjon blir da henholdsvis

$$\dot{y}(x,t) = \omega y_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

og

$$\ddot{y}(x,t) = \omega^2 y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

Maksimal vertikal hastighet blir dermed

$$v_y^{\mathrm{max}} = 2\pi \cdot 3 \cdot 0.05 = \frac{3\pi}{10} \simeq 0.94 \text{ m/s}$$

og maksimal vertikal akselerasjon blir

$$a_y^{\mathrm{max}} = 4\pi^2 \cdot 3^2 \cdot 0.05 = \frac{18\pi^2}{10} \simeq 18 \text{ m/s}^2$$