0B

11.09.06

Polarisasjon av transversale bølger

Lineærpolarisert bølge:

$\vec{D}(x,t) = D_0 \hat{y} \cos(kx-\omega t)$ — utsv. i y-retn.

$\vec{D}(x,t) = D_0 \hat{z} \cos(kx-\omega t)$ — utsv. i z-retn.

$\vec{D}(x,t) = D_0 \hat{n} \cos(kx-\omega t)$ — $\hat{n}$ = enhetsvektor i vilkårlig retning i yz-planet

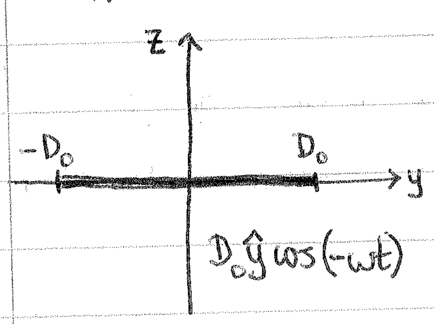
Sirkulærpolarisert bølge:

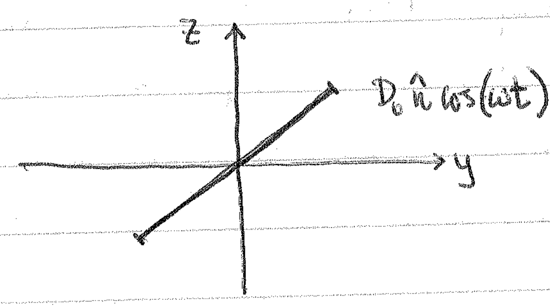
$\vec{D}(x,t) = D_0 \hat{y} \cos(kx-\omega t) + D_0 \hat{z} \sin(kx-\omega t)$ (se øving 4)

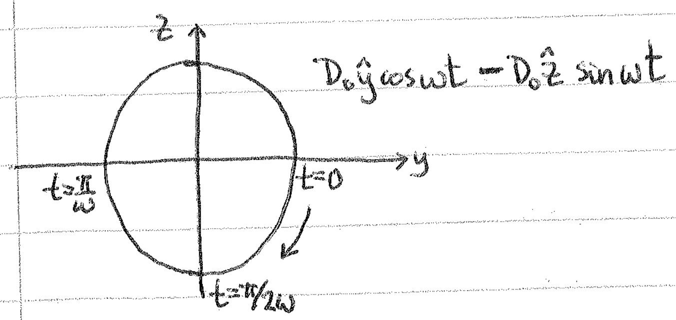
Elliptiskpolarisert bølge:

$\vec{D}(x,t) = D_y \hat{y} \cos(kx-\omega t) + D_z \hat{z} \sin(kx-\omega t)$ $(D_y \neq D_z)$

Kan illustreres med kurven som $\vec{D}$ følger ved f.eks. $x=0$:







(Her er $\hat{x}$ ut av planet, så vi ser mot bølgens forpl. retning)

(FGT 14.4, AF 28.5) (YF 16)

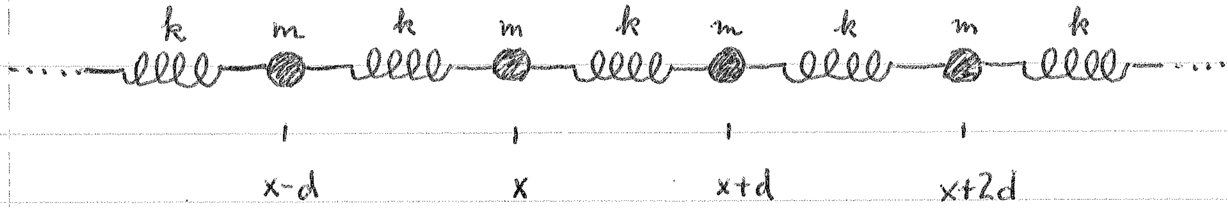
(L 10.6, TM 15.2)

Longitudinale mekaniske bølger

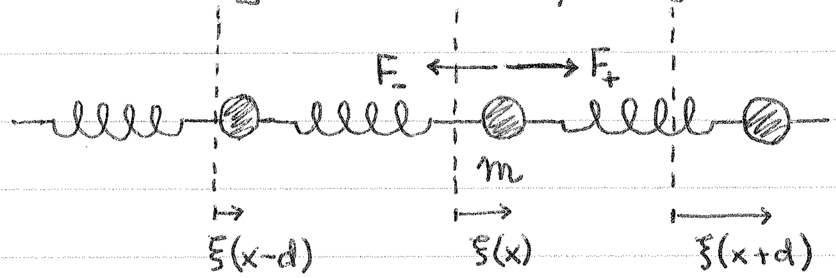
Motivasjon: ønsker å beskrive og forstå f.eks. lydbølger i elastiske medier som luft, vann og faste stoffer

Modell: masse / fjær - transmisjonslinje

Likevekt:



[ikke bare leketøy: god modell for krystaller!]



$\xi(x)$ = utsving av masse ved posisjon x (dvs likevektspos. x)

$\xi(x \pm d)$ = —— " —— $x \pm d$ (—— " —— $x \pm d$)

Nettokraft på masse ved x:

$$F = F_+ - F_- = k\underbrace{\left[\xi(x+d) - \xi(x)\right]}_{\text{strekk i fjær til høyre}} - k\underbrace{\left[\xi(x) - \xi(x-d)\right]}_{\text{strekk i fjær til venstre}}$$

$$m\text{'s akselerasjon} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\underbrace{x}_{\text{konstant}} + \xi(x,t)\right] = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

Bevegelsesligningen blir, fra Newtons 2. lov:

$$m \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = k\left[\xi(x+d,t) + \xi(x-d,t) - 2\xi(x,t)\right]$$

Kan løses eksakt (se øving 5), men vi antar her $d \ll \lambda$ slik at $\xi(x \pm d, t)$ ikke er mye forskjellig fra $\xi(x,t)$. Dermed:
[såkalt kontinuumsgrense]

$$\xi(x \pm d, t) \approx \xi(x,t) \pm d \cdot \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} d^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

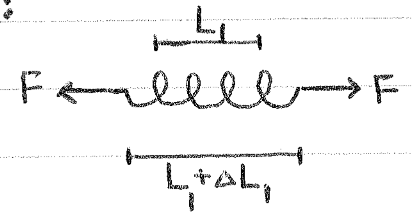
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{k \cdot d^2}{m} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dvs bølgeligning for utsvinget $\xi(x,t)$ fra likevekt, med bølgehastighet

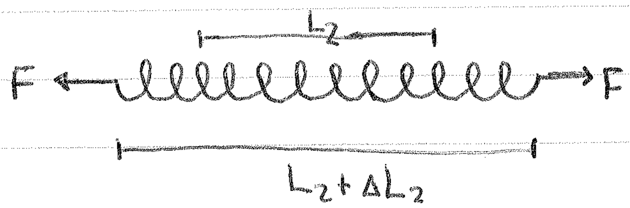
$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

[Enhet? $\frac{N}{m} \cdot m^2/kg = \frac{(kgm/s^2)\cdot m}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$]

Elastisk modul:



$$k_1 = \frac{F}{\Delta L_1}$$



$$k_2 = \frac{F}{\Delta L_2} < k_1$$

$\Rightarrow$ k avhenger av lengden L

Men $K = k \cdot L$ karakteristisk for "fjær-typen" (materiale og form), uavh. av lengden:

$$F = k\Delta L = kL \frac{\Delta L}{L} = K \frac{\Delta L}{L}$$

relativ tøyning

K = fjæras elastiske modul ; $[K] = N$

Massetetthet: $\mu = \frac{m}{d}$ = massen pr lengdeenhet

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} = \sqrt{\frac{k \cdot d}{m/d}} = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}}$$

Generelt: Bølgehastighet for mekaniske bølger bestemt av materialets elastisitet og massetetthet

Merk: Startet med diskret modell. Idet vi lar $d \to 0$, betrakter vi system med kontinuerlig massefordeling. Endte opp med v uttrykt ved makroskopiske parametre (K, μ), men vi ser at disse har mikroskopisk opprinnelse (Eks: k = mål for kraft mellom naboatomer ved sammenpressing, m = atommasse, d = avstand mellom naboatomer)

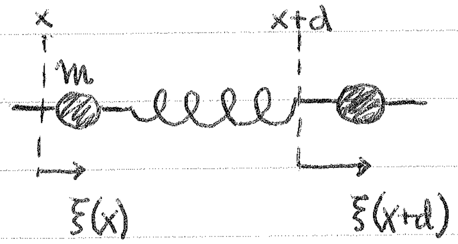
Vi har nå et par enkle modeller som grunnlag for å diskutere en rekke ting:

- energi- og impulstransport i bølger
- lydbølger i gass, væske, fast stoff
- refleksjon og transmisjon av bølger i grenseflate mellom to medier
- stående bølger

(FGT 14.5, AF 28.10, YF 15.5)

(LL 10.5, TM 15.2

<u>Energi transportert med bølge</u>



Kinetisk energi til m: $E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$

Potensiell energi i fjær til høyre for m: $E_p = \frac{1}{2} k \left[\xi(x+d) - \xi(x)\right]^2$

$\xi(x+d) \approx \xi(x) + d \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \Rightarrow E_p \approx \frac{1}{2} k d^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$

$\xi(x,t) = \xi(x - vt)$ for bølge i pos. x-retn.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial (x-vt)} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial t}}_{-v} = -v \frac{\partial \xi}{\partial (x-vt)} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial (x-vt)} \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \xi}{\partial (x-vt)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La oss sette $X = x - vt$. Ettersom ξ <u>kun</u> avhenger av X, har vi

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{d\xi}{dX}$$

og dermed $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{d\xi}{dX}$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dX}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow E_k &= \frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{kd^2}{m} \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 = \frac{1}{2} k d^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k d^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_k = E_p$$

Hit 16.09.06

Dvs: i mekanisk vandrebølge er pot. energi (knyttet til elastisitet) og kin. energi (pga masse i bevegelse) like store overalt og til enhver tid

Total energi: $E = E_k + E_p = 2E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2$

Bølgens energi pr lengdeenhet: $\varepsilon = \frac{E}{d} = \frac{m}{d} v^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 = \mu v^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2$

Eks: Harmonisk bølge

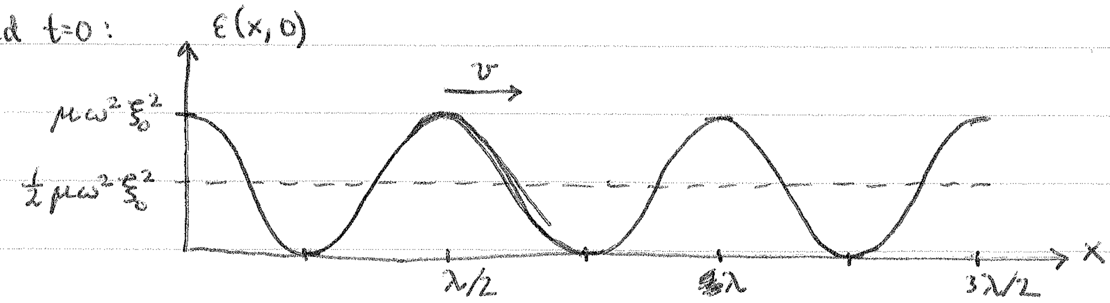
$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ (NB!! Her er $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ bølgetallet!)

$v = \omega/k = \sqrt{K/\mu}$

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{d}{dX} \xi_0 \sin k\underbrace{(x - vt)}_{X} = k\xi_0 \cos kX = k\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

$\Rightarrow$ Energi pr lengdeenhet: $\varepsilon = \mu \underbrace{v^2 k^2}_{\omega^2} \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$

ved $t=0$:



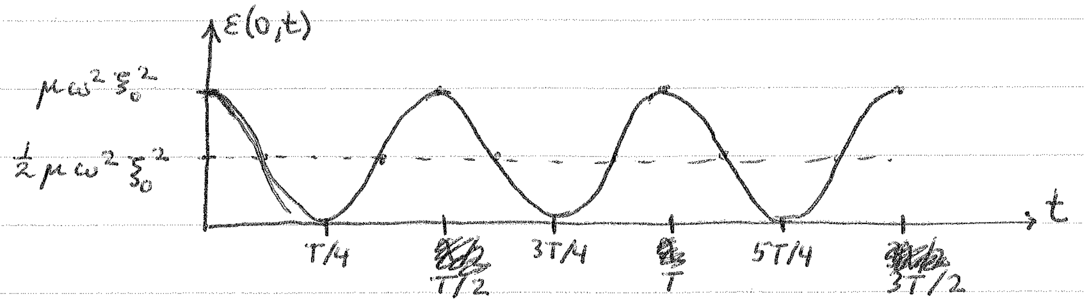
ettersom $\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x - vt)$, oppfyller $\varepsilon(x,t)$ bølgelign.

$\Rightarrow$ ε forpl. seg med hastighet v i bølgens forpl. retn.

Ser fra figuren at midlere energitetthet er $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$

(Formelt: $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx$)

alternativt, ved fast posisjon, f.eks. $x=0$: $\varepsilon(0,t) = \mu\omega^2\xi_0^2\cos^2\omega t$



Midlere energitetthet ved $x=0$ (f.eks.):

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(0,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(0,t)\,dt = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

Energi mellom $x=-\lambda$ og $x=0$ passerer $x=0$ i løpet av tiden T

$\Rightarrow$ energien overført pr tidsenhet blir (P="power", effekt)

$$P = \frac{\bar{\varepsilon}\cdot\lambda}{T} = \bar{\varepsilon}\cdot v = \frac{1}{2} v\mu\omega^2\xi_0^2 \qquad (J/s, \text{ evt } W)$$

Enhet: $\frac{m}{s}\cdot\frac{kg}{m}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot m^2 = \frac{kg\,m^2}{s^3} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{kg\cdot m}{s^2}\right)}_{\text{kraft}}\cdot\underbrace{m}_{\text{lengde}}}_{\text{energi}}\cdot\left(\frac{1}{s}\right)}_{\text{energi pr tidsenhet}}$, OK!

Hit 13.09.06