25.09.06 | Side 53 og 54 tas før 47-52



## Litt om bølger i flere (enn en) dimensjoner (LL 10.5, TM 15.3)

Hittil: $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$

= harmonisk bølge som forpl. seg i x-retn.

I et plan $\perp$ x-aksen: samme utseende ($\xi$ uavh. av y og z)

Flate med konstant fase = bølgefront

Bølge med plane bølgefronter = plane bølger (planbølger)

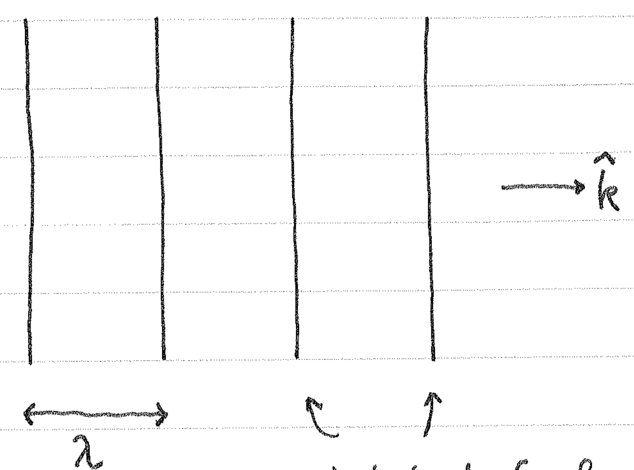
Planbølge som forpl. seg i vilkårlig retning:

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$$

med $\vec{k} = k \cdot \hat{k}$ = bølgevektor (bølgetallsvektor)

$\hat{k}$ = enhetsvektor i bølgens forpl. retning

Har bølgefront i plan $\perp$ $\vec{k}$

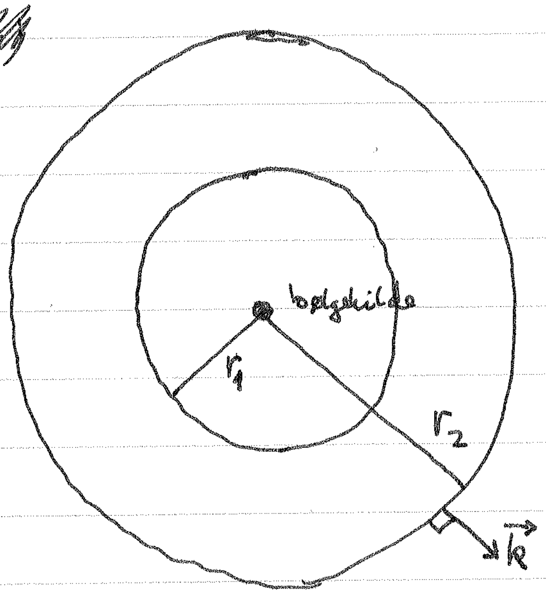



bølgefronter (med samme fase dersom avst. $\lambda$ mellom dem)

# Sfæriske bølger (Kulebølger) i fluid

Fra før: $I \sim \bar{P} \sim \xi^2$

intensitet — middere effekt — utsving




kuleformede bølgefronter

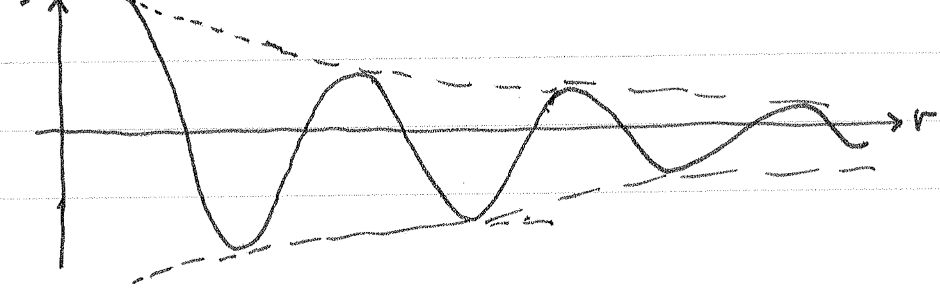
energibevarelse $\Rightarrow \bar{P}_1 = 4\pi r_1^2 I_1 = \bar{P}_2 = 4\pi r_2^2 I_2$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$\Rightarrow I \sim 1/r^2$ for kulebølge

~~Siden~~ $I \sim \xi^2 \Rightarrow \xi \sim 1/r$ for kulebølge

$$\Rightarrow \boxed{\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi)}$$




Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left\{ \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} \right\}$$

Herfra 25.09.06

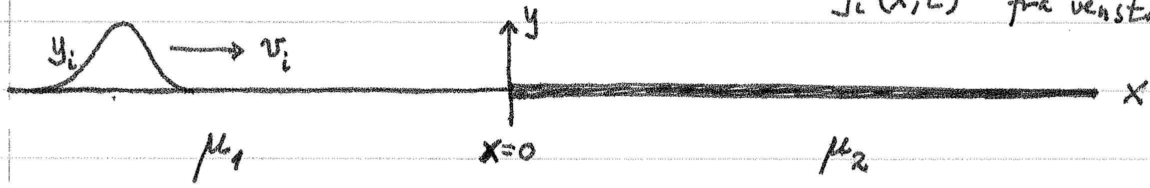
(FGT 14.6, 15.5; AF 34.4, 32; YF 15.7)



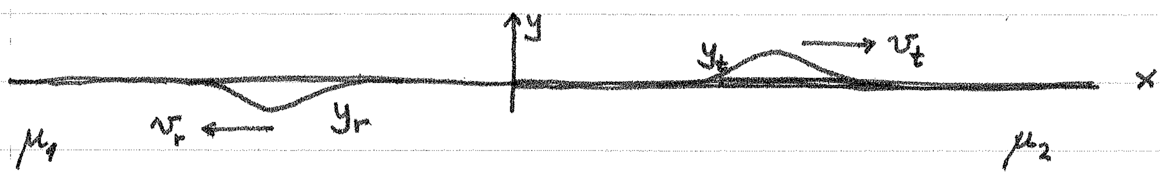
(LL 10.3, TM 15.4, 16)

## Refleksjon, transmisjon og stående bølger

Ser på transversal bølge på $\underbrace{\text{streng}}_{}$ (horisontal strekk-kraft $S$ overalt) med massetetthet $\mu_1$ for $x<0$ og $\mu_2$ for $x>0$. Innkommende bølge $y_i(x,t)$ fra venstre:




Bølgen blir (generelt) delvis <u>reflektert</u> og delvis <u>transmittert</u> i skjøtepunktet ("grenseflaten") $x=0$:




Hvordan ~~beregne~~ bestemme reflektert bølge $y_r(x,t)$ og transmittert bølge $y_t(x,t)$ for gitt innkommende bølge $y_i(x,t)$?

Bølgenes hastigheter: $v_i = v_r = \sqrt{\frac{S}{\mu_1}} = v_1$; $\quad v_t = \sqrt{\frac{S}{\mu_2}} = v_2$

Fysiske betingelser:

- $y$ kontinuerlig i $x=0$ } og $\partial y/\partial t$ kont. i $x=0$ (ellers: brudd!)
- $\partial y/\partial x$ —— " —— (ellers: $\ddot{y} \to \infty$, se 6.9.06) (egentlig: $S \cdot \partial y/\partial x$ kontinuerlig, men har antatt felles $S$)
- $\bar{P}_i = \bar{P}_r + \bar{P}_t$ (energibevarelse) ($\bar{P}$ = midlere effekt)

Ser på <u>harmoniske</u> bølger:

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
y_i(x,t) = y_{i0} \sin(k_i x - \omega_i t + \varphi_i) \\
y_r(x,t) = y_{r0} \sin(k_r x + \omega_r t + \varphi_r)
\end{array}\right\} x \le 0 \\
y_t(x,t) = y_{t0} \sin(k_t x - \omega_t t + \varphi_t) \quad x \geq 0
\end{array}\right\} \text{helt generelt!}
$$

Strengens utsving : $y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & x \leq 0 \\ y_t(x,t) & x \geq 0 \end{cases}$

Må tilfredsstille <u>alle</u> fysiske betingelser <u>til enhver tid</u>.
Kun mulig dersom

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

og $$\varphi_i = \varphi_r = \varphi_t$$

Setter $\omega_i = \omega$ og velger $\varphi_i = 0$

$$\Rightarrow \; y_i(x,t) = y_{i0} \sin(k_i x - \omega t)$$
$$y_r(x,t) = y_{r0} \sin(k_i x + \omega t) \qquad \left(v_r = v_i \Rightarrow k_r = \frac{\omega}{v_r} = \frac{\omega}{v_i} = k_i\right)$$
$$y_t(x,t) = y_{t0} \sin(k_t x - \omega t)$$

$y$ kontinuerlig i $x=0$ $\Rightarrow -y_{i0} \sin \omega t + y_{r0} \sin \omega t = -y_{t0} \sin \omega t$

$$\Rightarrow \; y_{i0} - y_{r0} = y_{t0}$$

$\partial y / \partial x$ kont. i $x=0$ $\Rightarrow k_i y_{i0} \cos \omega t + k_i y_{r0} \cos \omega t = k_t y_{t0} \cos \omega t$
(egentlig: $S \cdot \partial y / \partial x$ !!)

$$\Rightarrow \; k_i y_{i0} + k_i y_{r0} = k_t y_{t0}$$

$$\Rightarrow \; y_{r0} = \frac{k_t - k_i}{k_t + k_i} y_{i0} \; ; \qquad y_{t0} = \frac{2k_i}{k_t + k_i} y_{i0}$$

Med $k_i = \omega / v_1$ , $k_t = \omega / v_2$ , $v_1 = \sqrt{S/\mu_1}$ og $v_2 = \sqrt{S/\mu_2}$ :

$$\boxed{y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0} \; ; \quad y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}}$$

- $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow y_{r0} = 0, \quad y_{t0} = y_{i0} \Rightarrow$ ingen refleksjon, OK!

- $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow y_{r0}/y_{i0} > 0 \Rightarrow y_r(0,t) = y_{r0} \sin \omega t$ har
  motsatt fase av $y_i(0,t) = y_{i0} \sin(-\omega t) = -y_{i0} \sin \omega t$

- $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow y_{r0}/y_{i0} < 0 \Rightarrow y_r(0,t)$ i fase med $y_i(0,t)$

- $\mu_2 \to \infty \Rightarrow y_{r0} = y_{i0}, \quad y_{t0} = 0 \Rightarrow$ total refleksjon!
  Eksempel: Streng festet i vegg i $x=0$
  $y(0,t) = y_i(0,t) + y_r(0,t) = 0$ (OK!)

- $\mu_2 \to 0 \Rightarrow y_{r0} = -y_{i0}, \quad y_{t0} = 2y_{i0}$ (fri streng i $x=0$)
  $\Rightarrow y_r(0,t)$ i fase med $y_i(0,t)$
  (Hele bølgen reflekteres: ingen streng i $x>0$ når $\mu_2 \to 0$)

Transmisjons- og refleksjonskoeffisient

Midlere effekt propagert med harmonisk bølge: $\bar{P} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$
der $\xi_0$ = amplituden.

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i} = \frac{\frac{1}{2} v_2 \mu_2 \omega^2 y_{t0}^2}{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{i0}^2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cdot \underbrace{\frac{4\mu_1}{(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1})^2}}_{(y_{t0}/y_{i0})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1})^2}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i} = \frac{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{r0}^2}{\frac{1}{2} v_1 \mu_1 \omega^2 y_{i0}^2} = \left(\frac{y_{r0}}{y_{i0}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1})^2}{(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1})^2}$$

Energibevarelse?

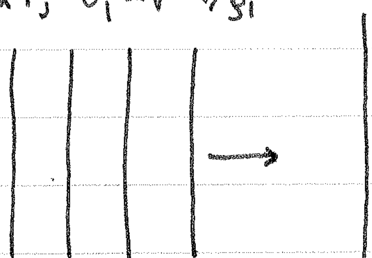
$$T + R = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i} + \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i} = \frac{4\sqrt{\mu_1\mu_2} + \mu_2 - 2\sqrt{\mu_1\mu_2} + \mu_1}{\mu_2 + 2\sqrt{\mu_1\mu_2} + \mu_1} = 1$$

som betyr $\overline{P}_t + \overline{P}_r = \overline{P}_i$ OK!

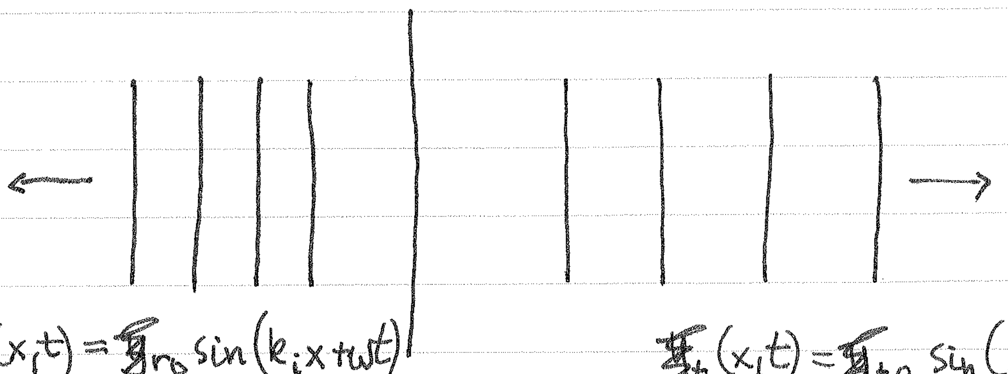
Hit 25.09.06

27.09.06 Plan (rett) lydbølge mot grenseflate mellom to medier

medium 1; $v_1 = \sqrt{B_1/\rho_1}$ $x=0$ medium 2; $v_2 = \sqrt{B_2/\rho_2}$

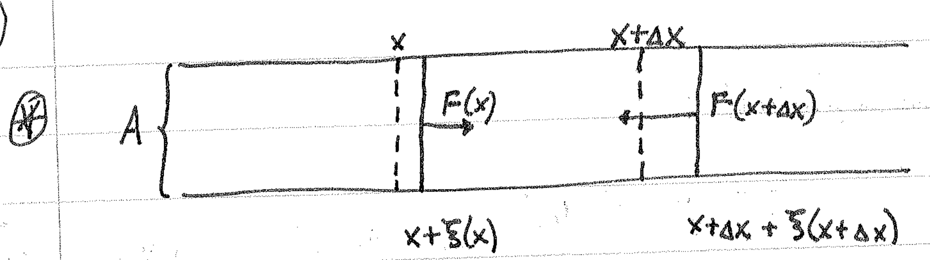


$\xi_i(x,t) = \xi_{i0} \sin(k_i x - \omega t)$



$\xi_r(x,t) = \xi_{r0} \sin(k_i x + \omega t)$ $\xi_t(x,t) = \xi_{t0} \sin(k_t x - \omega t)$

50B




$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta m \cdot a = \rho \underbrace{\Delta x\, A}_{\Delta V} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+\Delta x)}{A} - \frac{F(x)}{A} = \rho\, \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \longrightarrow 0 \quad \text{når } \Delta x \to 0$$

$\Rightarrow \frac{F}{A}$ kontinuerlig

Fra før;
Hookes lov: $\frac{F}{A} = -B \cdot \frac{\Delta L}{L} = -B \frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$

bulkmodulen

$\Rightarrow B \frac{\partial \xi}{\partial x}$ må være kontinuerlig i grenseflaten, i tillegg til $\xi$ selv, selvsagt

~~Får nå ikke~~ $\cancel{T\left(=\frac{P_t}{P_i}\right) = \frac{4\sqrt{\rho_1\rho_2}}{(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})^2} = 1}$

(*) Må (her) bruke at $\mathbf{B}\cdot\partial\xi/\partial x$ er kontinuerlig i $x=0$:

$$\Rightarrow\quad B_1 k_i \xi_{i0} + B_1 k_i \xi_{r0} = B_2 k_t \xi_{t0}$$

Som kombinert med $\xi_{i0} - \xi_{r0} = \xi_{t0}$ (kontinuitet av $\xi$)
gir

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}}\,\xi_{i0}$$

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}}\,\xi_{i0}$$

$$\Rightarrow T = \frac{v_2\rho_2}{v_1\rho_1}\left(\frac{\xi_{t0}}{\xi_{i0}}\right)^2 = \frac{\sqrt{\rho_2 B_2}}{\sqrt{\rho_1 B_1}}\cdot\frac{4\rho_1 B_1}{(\sqrt{\rho_2 B_2}+\sqrt{\rho_1 B_1})^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\sqrt{\rho_1 B_1 \rho_2 B_2}}{\left(\sqrt{\rho_2 B_2}+\sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2}}}$$

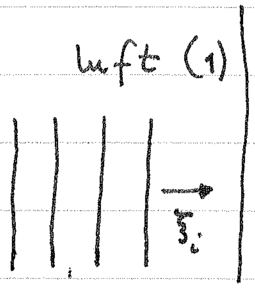
Og $R = \ldots = \underline{\underline{\dfrac{\left(\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2}{\left(\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}\right)^2}}}$

$\Rightarrow T + R = 1$

(OK!)

Eksempel 1, to fluider:

luft (1) | vann (2)




$T = 20°C$

$P = 1\,atm$

$B_2 = B_{vann} = 2.1 \cdot 10^9\ N/m^2$

$B_1 = B_{luft} = \gamma P = \frac{7}{5} \cdot 10^5\ N/m^2$

$\Rightarrow \sqrt{\rho_1 B_1} = \sqrt{1.29 \cdot 1.4 \cdot 10^5} \approx 425\ kg/m^2s$

$\sqrt{\rho_2 B_2} = \sqrt{10^3 \cdot 2.1 \cdot 10^9} \approx 1.45 \cdot 10^6\ kg/m^2s$

$$\Rightarrow R = \left\{ \frac{\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_2 B_2} + \sqrt{\rho_1 B_1}} \right\}^2 \approx 0.9988 \approx \underline{99.9\%}$$

$T = 1 - R \approx \underline{0.1\%}$

Eksempel 2, tynn stang $(B \to Y)$:

lydbølge → Al (1) | Stål (2)

$\rho_1 = 2700\ kg/m^3$ | $\rho_2 = 7800\ kg/m^3$

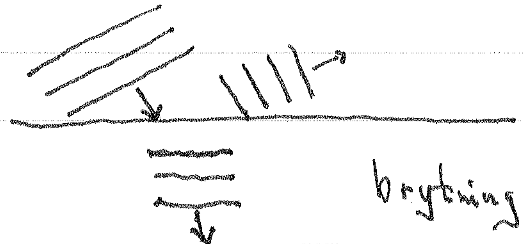
$Y_1 = 6.9 \cdot 10^{10}\ N/m^2$ | $Y_2 = 20 \cdot 10^{10}\ N/m^2$

$\sqrt{\rho_1 Y_1} = 1.36 \cdot 10^7$ | $\sqrt{\rho_2 Y_2} = 3.95 \cdot 10^7$

$$\Rightarrow R = \left( \frac{3.95 - 1.36}{3.95 + 1.36} \right)^2 \approx \underline{24\%}$$

$T = 1 - R \approx \underline{76\%}$

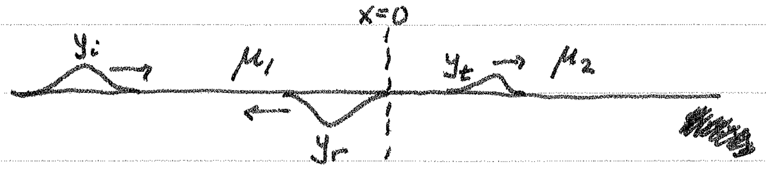
Senere i kurset:



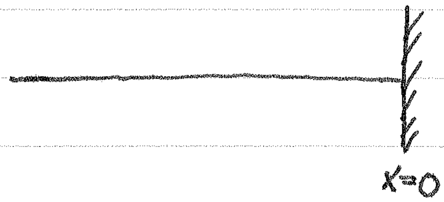
brytning! (Snells lov etc.)

## Stående bølger (LL 10.3, TM 16)

Fra sist:




Streng fast i vegg i $x=0$ (tilsv. $\mu_2 \to \infty$):




$$y_{r0} = y_{i0}$$

$$\Rightarrow \quad y_i(x,t) = y_{i0} \sin(kx - \omega t)$$
$$y_r(x,t) = y_{i0} \sin(kx + \omega t)$$

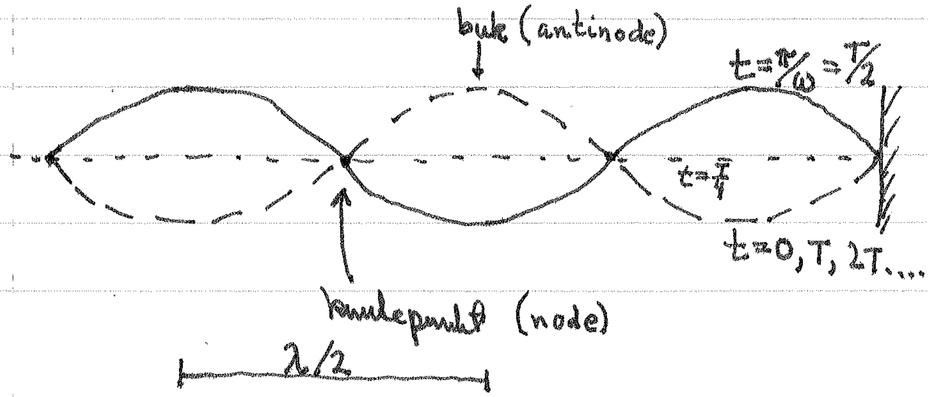
$$\Rightarrow \quad y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$$

$$= y_{i0} \left[ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \right]$$

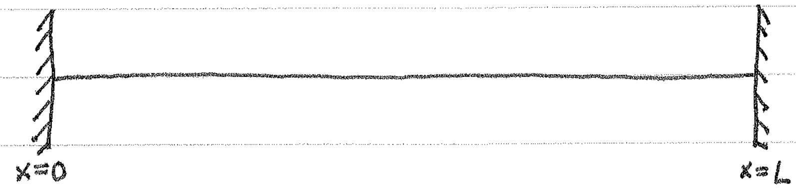
$$= y_{i0} \left[ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \right]$$

$$= 2 y_{i0} \sin kx \cos \omega t$$

dvs harmonisk svingning ($\cos \omega t$) med x-avhengig amplitude ($2 y_{i0} \sin kx$), kalles stående bølge:



Streng med lengde L, fast i begge ender:




$y(x,t) = y_0 \sin kx \cos\omega t$

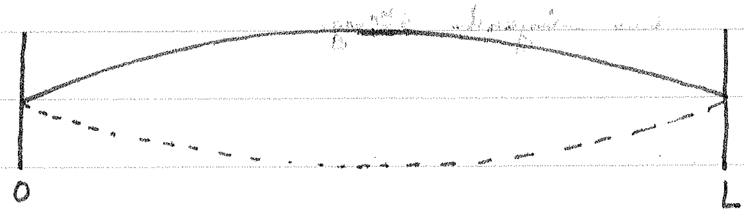
$y(L) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Mulige Bølgelengder $\lambda_n$ for stående bølger: $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Tilhørende frekvenser $\nu_n$: $\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{2L} = n \cdot \frac{\sqrt{S/\mu}}{2L}$

(resonansfrekvenser)

$n = 1$:

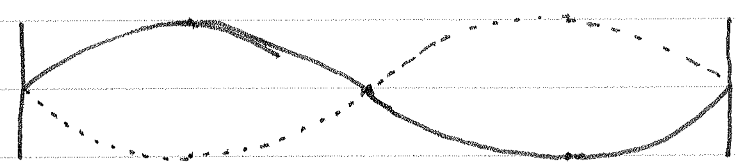



$\lambda_1 = 2L$

$\nu_1 = \sqrt{S/\mu}\,/2L$

grunnfrekvens, fundamental frekvens, første harmoniske (grunntone)

$n = 2$:



$\lambda_2 = 2\lambda_1 = L$

$\nu_2 = 2\nu_1$

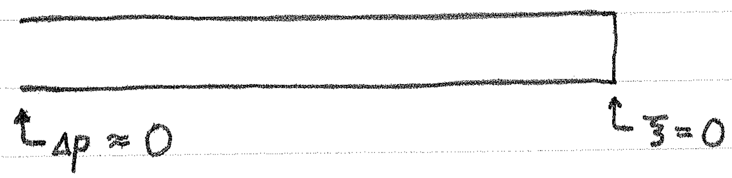
andre harmoniske (1. overtone)

Strengeinstrumenter: (fele, piano osv) stående bølger på streng setter lufta omkring i svingninger $\Rightarrow$ lydbølge med <u>samme frekvens</u> (men <u>ikke</u> samme bølgelengde da $v_{streng} = \sqrt{S/\mu}$ generelt er ulik $v_{luft} = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{\gamma P/\rho}$)

"Resonanskasse" $\Rightarrow$ forsterkning av lyden

Stående lydbølger i luftsøyle: $\xi(x,t)$ = longitudinalt utsving av luftmolekylene
(prinsipp for blåseinstrumenter)

1 åpen og 1 lukket ende:




$\Delta p$ = avvik fra likevektstrykket $p$

$\Rightarrow$ $\Delta p \approx 0$ utenfor – og (omtrent) inn til den åpne enden av – røret

Fra før: $\Delta p(x,t) = -B \dfrac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$

$\Rightarrow$ stående bølger i røret må ha

knutepunkt for $\xi$ / buk for $\Delta p$ i lukket ende $(x=0)$
og —"— $\Delta p$ / —"— $\xi$ i åpen ende $(x=L)$

$\Rightarrow$ $\xi(x,t) = \xi_0 \sin kx \cos \omega t$

med $kL = n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, $L$ = rørlengden

(dermed: $\Delta p(x,t) = -B\xi_0 k \cos kx \cos \omega t$
dvs $\cos kL = 0 \Rightarrow kL = n \cdot \frac{\pi}{2}$ (odde $n$), OK!)

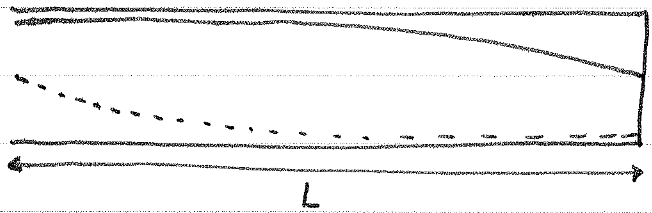
$\Rightarrow$ Mulige bølgelengder for stående bølger: $\lambda_n = \dfrac{2\pi}{k_n} = \dfrac{4L}{n}$ (odde $n$)

Tilhørende frekvenser: $\nu_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = \dfrac{n}{4L}\sqrt{\gamma P/\rho}$ (—"—)

(resonansfrekvenser)

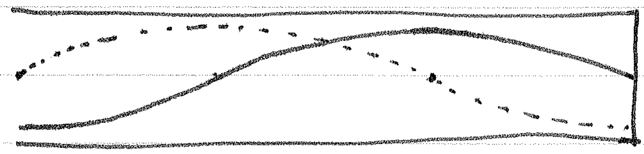
—— $\xi$
- - - $\Delta p$

$n=1$:




$\lambda_1 = 4L$
$\nu_1 = \sqrt{\gamma k_B T/m}\,/4L$

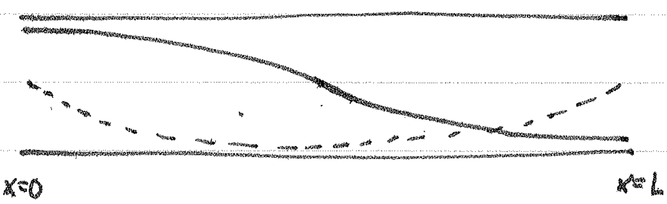
$n=3$:



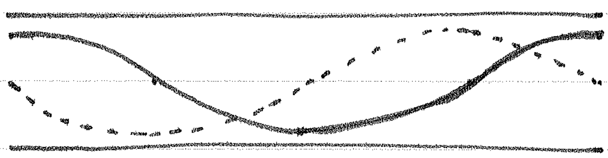
$\lambda_3 = 4L/3$
$\nu_3 = 3\nu_1$

⋮

Med 2 åpne ender: $\Delta p(0,t) = \Delta p(L,t) = 0$




$\lambda_1 = 2L$



$\lambda_2 = L$

⋮

Merk: Stående bølger er et resonansfenomen.
Eksiteres (Bygges opp) av ytre kraft som svinger med frekvens lik en av "egenfrekvensene" $\nu_n$.