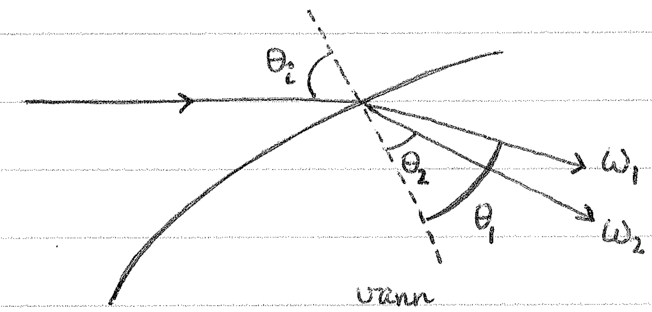
30.10.06

Dispersjon. Regnbue. (LHL 30.7, TM 31.6)

Dispersjon: $v = v(\omega)$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{c}{v} = \frac{c}{v(\omega)} = n(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r \approx n^2(\omega) \approx \varepsilon_r(\omega) \qquad (\text{antar } \mu_r \approx 1)$$



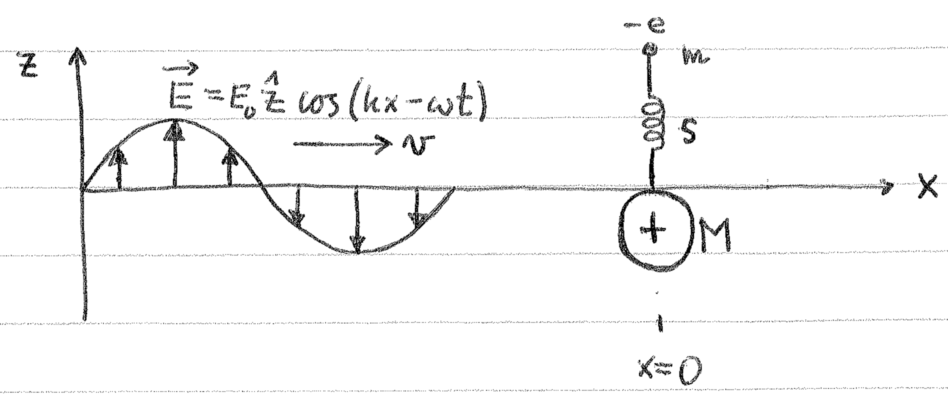
$n(\omega_1) = n_1$

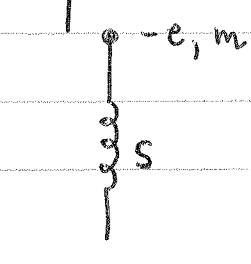
$n(\omega_2) = n_2 > n_1$

$\Rightarrow$ f.eks. regnbue (mer snart!)

Men hvorfor er e.m. bølger dispersive i et dielektrikum som f.eks. vann?

Ser på enkel modell for bundet elektron i molekyl (for å finne ut noe om $\varepsilon_r(\omega)$ og $n(\omega)$):





$$m\ddot{z} = -sz - eE_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

med

$$z_0(\omega) \sim \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \text{(jfr Tvungen svingning)}$$

$\Rightarrow$ indusert dipolmoment $\vec{p}(t) = \hat{z}\, p_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$

med

$$p_0(\omega) = e z_0(\omega) \sim \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\Rightarrow$ elektrisk polarisering $P = \frac{\Delta p}{\Delta V} \sim \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E = A \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$D = \varepsilon_0 E + P \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0} - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 \left\{ 1 - \frac{A/\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{\varepsilon_r} = E_0 \left\{ 1 - \frac{A/\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r(\omega) \approx n^2(\omega) \approx \left\{ 1 - \frac{A/\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}^{-1}$$

$$\Rightarrow n(\omega) \approx \left\{ 1 - \frac{A/\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}^{-1/2}$$

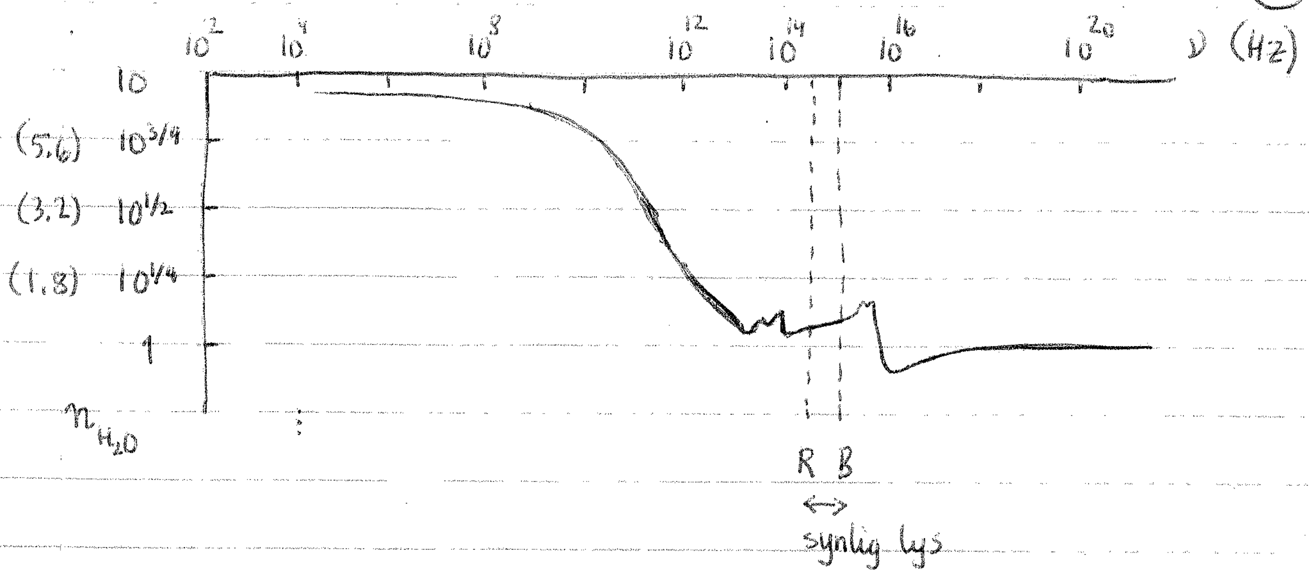
Dispersjon!

Synlig lys: $\omega \ll \omega_0$

$$\Rightarrow n(\omega) \approx \left\{ 1 - \frac{A}{\varepsilon_0 \omega_0^2} - \frac{A\omega^2}{\varepsilon_0 \omega_0^4} \right\}^{-1/2}$$

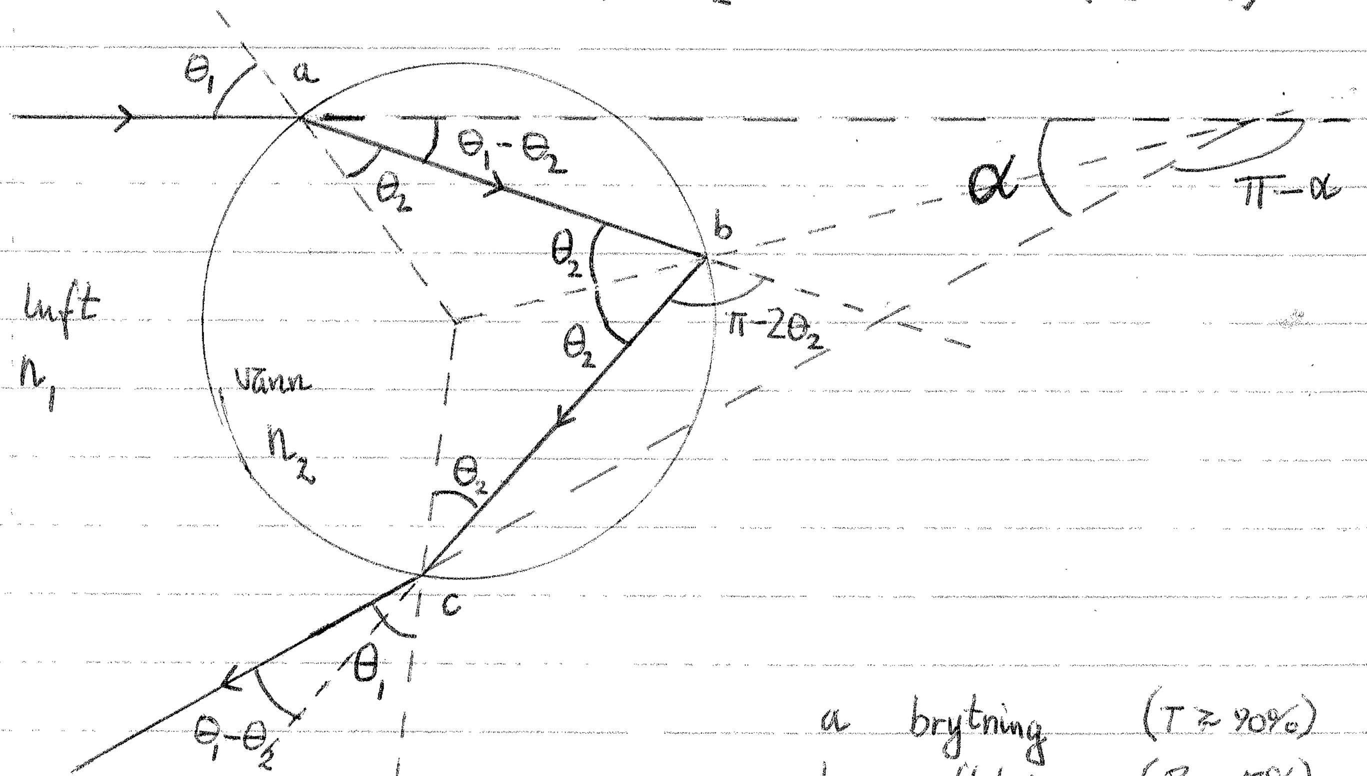
$$\approx 1 + \frac{A}{2\varepsilon_0 \omega_0^2} + \frac{A\omega^2}{2\varepsilon_0 \omega_0^4} \cdots \approx 1 + K_1 + \frac{K_2}{\lambda^2}$$

$\Rightarrow$ Blått lys ($\lambda_B \sim 400$ nm) brytes mer enn rødt lys ($\lambda_R \sim 700$ nm) i grenseflate luft/dielektrikum



Regnbuen:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)$$

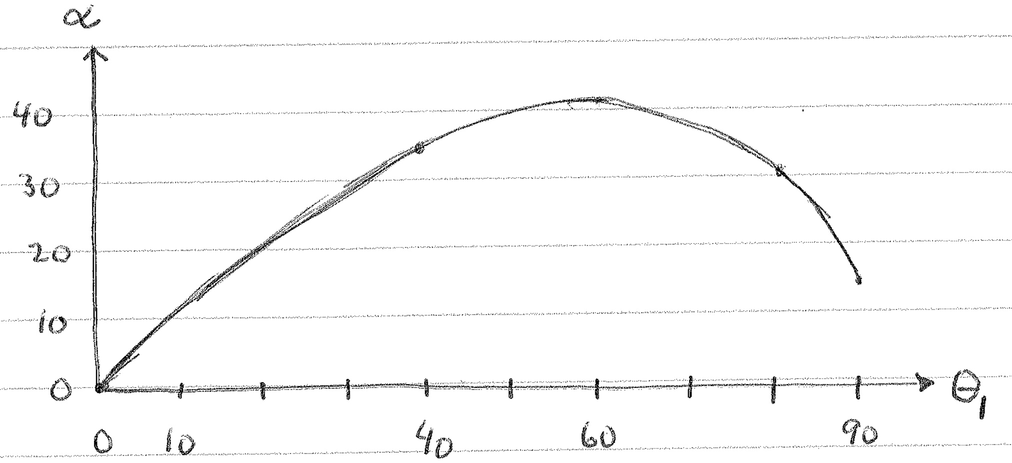


a brytning ($T \gtrsim 90\%$)
b refleksjon ($R \sim 5\%$)
c brytning ($T \gtrsim 90\%$)

Retningsendring =

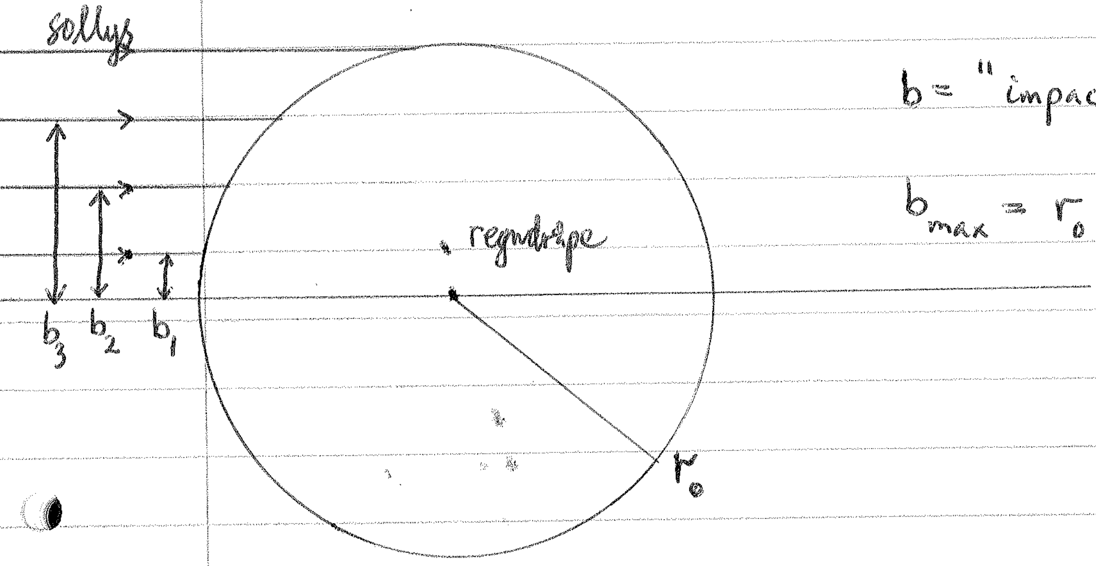
$$(\theta_1 - \theta_2) + (\pi - 2\theta_2) + (\theta_1 - \theta_2) = \pi + 2\theta_1 - 4\theta_2 = \pi - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 4\theta_2 - 2\theta_1 = 4\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right) - 2\theta_1$$



rødt lys: $\alpha^R_{max} \approx 42°$

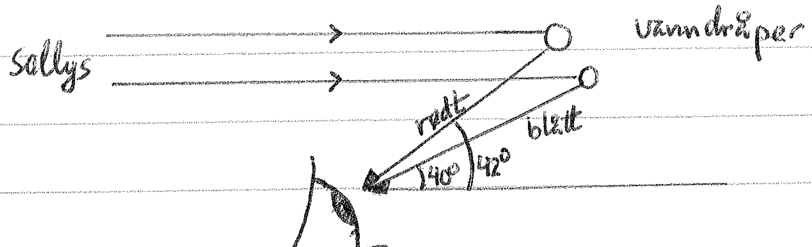
blått lys: $\alpha^B_{max} \approx 40°$



b = "impact parameter"

$b_{max} = r_0$ = dråpens radius

- Ulike α for ulike b
- "Størst" intensitet i retning gitt ved α_{max} (selv om det meste av intensiteten går ut av dråpen etter to brytninger) fordi ganske mange b-verdier gir Θ_1 i nærheten av 60°

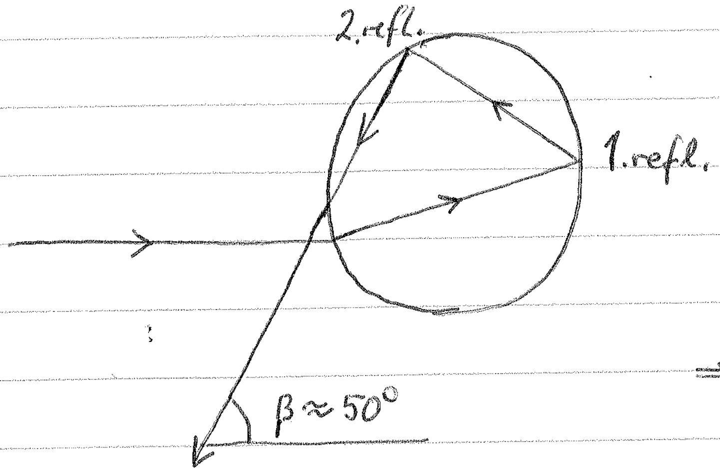


3 dimensjoner

⇓

bestemt farge fra dråper som ligger på kjegleflate med ditt øye i "topp-punktet"

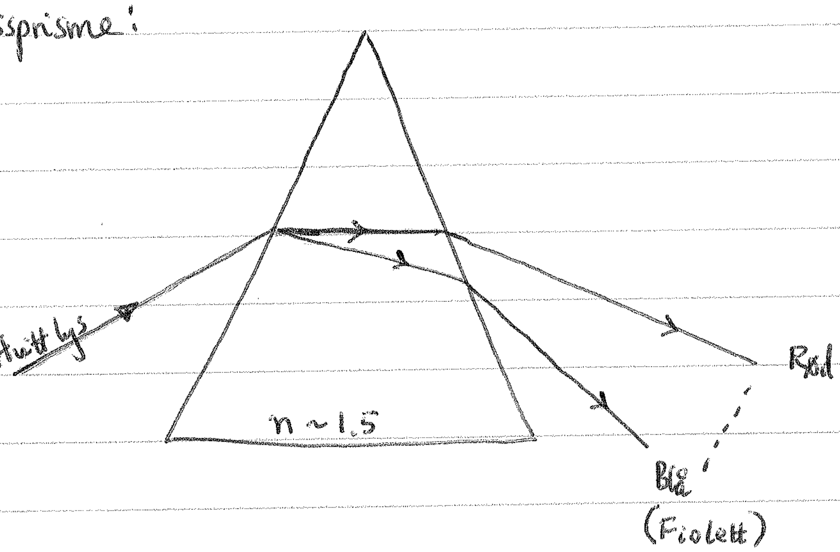
Sekundær regnbue fra 2 indre refleksjoner i vanndråpene:



større n ⇒ større β

⇒ blått ytterst og rødt innerst i sekundær regnbue!

Glassprisme:



ROGGBIF: Rød - Oranje - Gul - Grønn - Blå - Indigo - Fiolett

λ (nm)	760	610	590	540	460	400
ν ($\times 10^{14}$ Hz)	3.9	4.9	5.1	5.6	6.5	7.5

(1.11.06)

Fermats prinsipp og Huygens' prinsipp (LHL 29.1, TM 31.5, 31.8)

Lysets utbredelse, dvs geometrisk optikk, kan forklares med ett av følgende to fundamentale prinsipper:

Fermats prinsipp (Pierre de Fermat 1601–1655):

En lysstråle velger den veien mellom to punkter A og B som tar kortest tid.

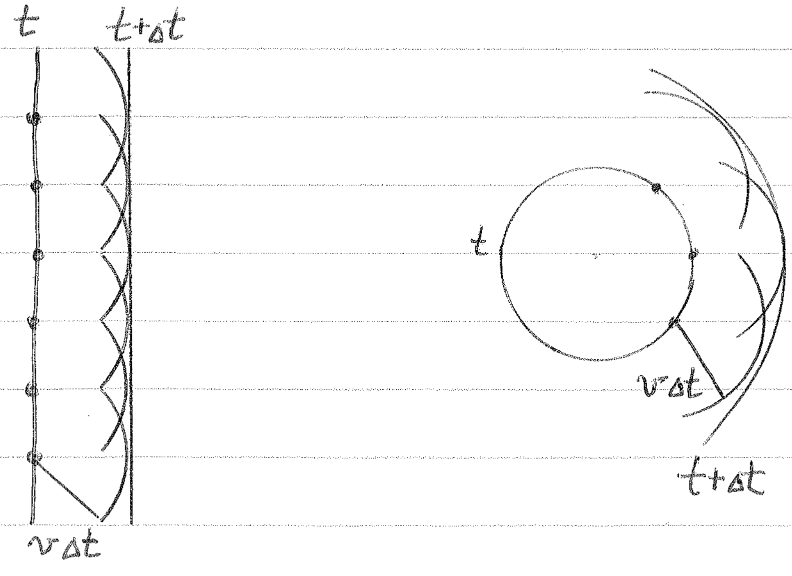
[Analogi: Minimering av et systems energi. "Variasjonsprinsipp"]
[Fundamental egenskap ved naturen!]

Huygens' prinsipp (Christiaan Huygens 1629–1695):

Ethvert punkt på en bølgefront er opphav til en ny kuleformet "småbølge". På et senere tidspunkt er bølgefronten overflatetangenten til alle disse småbølgene.

[Småbølgene har samme bølgefart som "primærbølgen"]

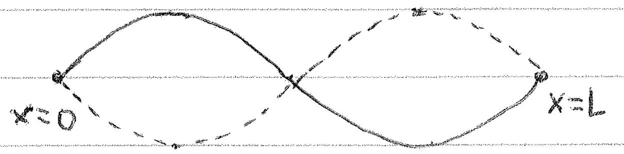
Eks:



Nyttig i forb. med diffraksjon og interferens.

Interferens (LHL 30, TM 33)

Eksempel: Stående bølger på streng



(2. harmoniske)

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = \xi_0 \sin kx \sin \omega t \qquad \left(k = \frac{2\pi}{L}\right)$$

↑

superposisjonsprincippet!

$\Rightarrow$ utsvings maksima (ved $x = \frac{L}{4}, \frac{3L}{4}$) og -minima (ved $x = 0, \frac{L}{2}, L$)

Får tilsvarende effekt også i 2 og 3 dimensjoner, med lydbølger, overflatebølger, elektromagnetiske bølger osv

Bruker lys som eksempel.

Antar monokromatisk lys (dvs: kun én frekvens) og samme frekvens fra alle lyskilder.

Antar koherente lyskilder: Fast (tidsuavhengig) sammenheng mellom fasene til alle lysstrålene (bølgene). (Men ikke nødvendigvis bølger "i fase".)

Eks: $E_1(r,t) = E_0 \cos(kr - \omega t - \varphi_1)$

$E_2(r,t) = E_0 \cos(k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi_2)$

$\Rightarrow$ faseforskjell: $\Delta\phi = k\Delta r - \varphi_2 + \varphi_1$ er uavhengig av t

[Inkoherent lys: $\Delta\phi(t)$]