Løsningsforslag til øving 10

Oppgave 1

a) Forplantning i z-retning betyr at $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ begge ligger i xy-planet. La oss for eksempel velge $\boldsymbol{E}$ langs $\hat{x}$. Innkommende bølge:

$$\boldsymbol{E}_i = \hat{x}\, E_{i0}\, \cos(k_1 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_i = \hat{y}\, B_{i0}\, \cos(k_1 z - \omega t)$$

Reflektert bølge:

$$\boldsymbol{E}_r = \hat{x}\, E_{r0}\, \cos(-k_1 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_r = -\hat{y}\, B_{r0}\, \cos(-k_1 z - \omega t)$$

Transmittert bølge:

$$\boldsymbol{E}_t = \hat{x}\, E_{t0}\, \cos(k_2 z - \omega t)$$

$$\boldsymbol{B}_t = \hat{y}\, B_{t0}\, \cos(k_2 z - \omega t)$$

Total bølge for $z < 0$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{B}_r$$

Total bølge for $z > 0$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_t$$

Bølgetallene i de to mediene er $k_1 = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_2 = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Magnetfeltamplitudene kan vi uttrykke ved amplitudene til det elektriske feltet, dvs $B_{i0} = E_{i0}/v_1$, $B_{r0} = E_{r0}/v_1$ og $B_{t0} = E_{t0}/v_2$.
Retningen på magnetfeltet er fastlagt (ved $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$) når retningen på $\boldsymbol{E}$ er valgt. Legg merke til at vi her ikke har antatt noe bestemt med hensyn til fasen til $\boldsymbol{E}_r$ og $\boldsymbol{E}_t$ i forhold til $\boldsymbol{E}_i$: Dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en positiv størrelse, betyr det at $\boldsymbol{E}_r$ er *i fase* med $\boldsymbol{E}_i$, og dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en negativ størrelse, betyr det at $\boldsymbol{E}_r$ er *i motfase* med $\boldsymbol{E}_i$. Og tilsvarende for $\boldsymbol{E}_t$.
Maxwells ligninger resulterte i kontinuitet av parallellkomponenten av $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{H}$ i grenseflaten mellom to medier (oppgave 3). Vi antar lineær respons, slik at parallellkomponenten av $\boldsymbol{B}/\mu$ blir kontinuerlig i grenseflaten, dvs i $z = 0$. Her har feltene ingen komponent normalt på grenseflaten, slik at kontinuitet av parallellkomponenten betyr rett og slett kontinuitet av $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}/\mu$. Dette gir følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{E_{i0}}{v_1} - \frac{E_{r0}}{v_1}\right) &= \frac{1}{\mu_2}\frac{E_{t0}}{v_2} \end{aligned}$$

Her kan notasjonen forenkles noe ved å innføre $\beta \equiv \mu_1 v_1/\mu_2 v_2$. Den siste av disse to ligningene blir da

$$E_{i0} - E_{r0} = \beta E_{t0}$$

Løsning med hensyn på de to ukjente amplitudene E_{r0} og E_{t0} gir

$$
\begin{aligned}
E_{r0} &= \frac{1-\beta}{1+\beta}\,E_{i0} \\
E_{t0} &= \frac{2}{1+\beta}\,E_{i0}
\end{aligned}
$$

b) Midlere intensitet i en harmonisk elektromagnetisk bølge er

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$$

der $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ er permittiviteten til mediet som bølgen forplanter seg i. Dette gir, for refleksjonskoeffisienten:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)^2 = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2$$

For medier som i praksis kan regnes som umagnetiske, dvs $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, har vi

$$\beta \simeq \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

slik at

$$R = \left(\frac{1-n_2/n_1}{1+n_2/n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$$

Transmisjonskoeffisienten blir

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_{t0}^2}{\varepsilon_1 v_1 E_{i0}^2}$$

Med tilnærmelsen $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$ blir $\varepsilon_2 v_2 \simeq n_2^2 c/n_2 = n_2 c$ og tilsvarende $\varepsilon_1 v_1 \simeq n_1 c$ slik at

$$T = \frac{n_2}{n_1}\frac{4}{(1+n_2/n_1)^2} = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

For grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med $\varepsilon_r = 2.25$ har vi $n_1 = 1$ og $n_2 = \sqrt{2.25} = 1.5$, som gir

$$R = \left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2 = 0.04$$

og dermed $T = 1 - R = 0.96$. Det virker rimelig: Nesten alt lys propagerer inn i (og gjennom) glass ved normalt innfall.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi ikke regne ut hvor mye av intensiteten i innkommende bølge som blir reflektert og transmittert (refraktert), vi skal kun se på *retningen* til reflektert og transmittert bølge.

a) I grenseflaten er $\boldsymbol{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$. Generelt vil de tre bølgetallsvektorene $\boldsymbol{k}_i$, $\boldsymbol{k}_r$ og $\boldsymbol{k}_t$ være forskjellige. Grensebetingelsene for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i grenseflaten $z = 0$ resulterer i en del ligninger på formen

$$A\cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) + B\cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = C\cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

Anta at denne er oppfylt på et bestemt sted $\boldsymbol{r}_1 = x_1\,\hat{x} + y_1\,\hat{y}$, og la oss for eksempel velge tidspunktet $t = 0$. Da er altså

$$A\cos \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}_1 + B\cos \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r}_1 = C\cos \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_1$$

Men denne ligningen må samtidig gjelde for alle mulige $\boldsymbol{r}_j$ i planet $z = 0$:

$$A\cos \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}_j + B\cos \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r}_j = C\cos \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}_j$$

for $j = 1, 2, 3, \ldots$. Det er åpenbart at dette kun er mulig dersom alle tre cosinusfaktorene er like store, uavhengig av hvilken posisjon $\boldsymbol{r}$ vi velger. Følgelig må vi ha

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}$$

for alle mulige posisjoner $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ i grenseflaten.

La oss nå for eksempel velge en posisjon $\boldsymbol{r} = (x, 0, 0)$. Det gir

$$k_{ix}x = k_{rx}x = k_{tx}x$$

dvs

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

Videre kan vi velge $\boldsymbol{r} = (0, y, 0)$, som gir

$$k_{iy}y = k_{ry}y = k_{ty}y$$

dvs

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Konklusjon: Forplantningsretningene til innkommende, reflektert og transmittert bølge ligger i ett og samme plan, *innfallsplanet*, som også inneholder grenseflatens flatenormal (her: $\hat{z}$).

b) Uten tap av generalitet (som det så fint heter) kan vi velge akser slik at innkommende bølge har $k_{iy} = 0$. Dermed er også $k_{ry} = k_{ty} = 0$. I figuren i oppgaveteksten danner da papirplanet xz-planet, og vi ser uten videre at

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_i \sin\theta_i \\ k_{rx} &= k_r \sin\theta_r \\ k_{tx} &= k_t \sin\theta_t \end{aligned}$$

I oppgave a konkluderte vi med at disse tre må være like store. Vi har videre $k_i = k_r = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_t = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Det gir

$$\theta_i = \theta_r,$$

refleksjonsloven, og

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t,$$

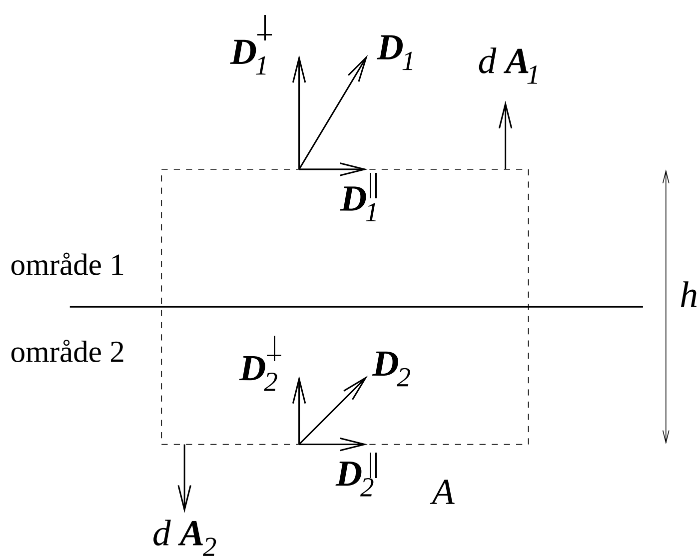
brytningsloven (Snells lov).

Kommentar: Det eneste vi har brukt i denne oppgaven er *formen* på ligningene som følger fra grenseflatebetingelsene som $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ må oppfylle. Av den grunn må vi forvente at også andre typer harmoniske bølger (f.eks. overflatebølger eller lydbølger) vil oppføre seg på lignende vis når de støter på en grenseflate mellom to ulike medier.

Men hvis vi er interessert i å finne ut hvordan innkommende intensitet fordeler seg på reflektert og transmittert bølge (dvs: bestemme refleksjons- og transmisjonskoeffisienter), slipper vi ikke utenom "detaljene" i grenseflatebetingelsene.

Oppgave 3

Vi ser først på komponenten av $\boldsymbol{D}$ normalt på grenseflaten. Gauss' lov sier at flateintegralet av $\boldsymbol{D}$ over en lukket flate skal være lik netto fri ladning innenfor den lukkede flaten. Her antar vi null fri ladning i grenseflaten.



Vi er interessert i hva som skjer idet vi krysser grenseflaten, så vi lar høyden av pilleesken, h, gå mot null. Det betyr at arealet av 4 av de 6 sideflatene på den valgte gaussflaten går mot null, så de eneste bidragene til flateintegralet i Gauss' lov kommer fra topplokket og bunnen. Bidraget fra topplokket blir $D_1^\perp A$ og bidraget fra bunnen blir $-D_2^\perp A$. Netto fri ladning innenfor gaussflaten er null, så vi har

$$D_1^\perp A - D_2^\perp A = 0$$

dvs

$$D_1^\perp = D_2^\perp$$

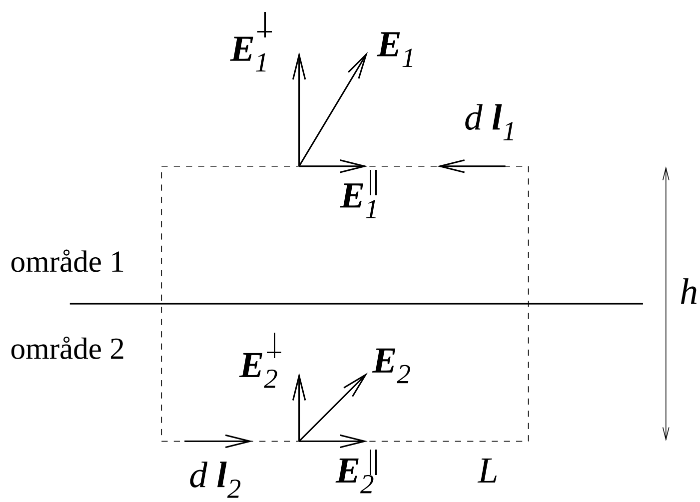
Konklusjon: Normalkomponenten av $\boldsymbol{D}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate uten netto fri ladning.

Tilsvarende framgangsmåte med $\boldsymbol{B}$ i stedet for $\boldsymbol{D}$ gir

$$B_1^\perp = B_2^\perp$$

Dvs: Normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate. Dette vil alltid være tilfelle i og med at det alltid står null på høyre side av likhetstegnet i Gauss' lov for magnetfeltet.

Vi ser deretter på komponenten av $\boldsymbol{E}$ parallelt med grenseflaten og tar utgangspunkt i Faraday-Henrys lov. Vi bruker tipset i oppgaveteksten og integrerer rundt en rektangulær kurve:



Når vi lar høyden h gå mot null, får vi null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $E_2^\parallel L$ ettersom feltet her peker samme vei som veielementet $d\boldsymbol{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-E_1^\parallel L$, for her peker feltet motsatt vei av $d\boldsymbol{l}_1$. Totalt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E_2^\parallel L - E_1^\parallel L$$

På høyre side av likhetstegnet i Faraday-Henrys lov har vi den tidsderiverte av den magnetiske fluksen gjennom flaten som omsluttes av den lukkede kurven. Men denne fluksen er jo åpenbart lik null ettersom arealet forsvinner når vi lar h gå mot null. Dermed har vi:

$$E_2^\parallel = E_1^\parallel$$

Konklusjon: Parallellkomponenten av $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.

Tilsvarende framgangsmåte kan vi bruke med utgangspunkt i Ampere-Maxwells lov. Med null fri strøm i grenseflaten og $h \to 0$ forsvinner alt som står på høyre side, og vi får

$$H_2^\parallel = H_1^\parallel$$

Dvs: Parallellkomponenten av $\boldsymbol{H}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate uten fri strøm.

Kommentar: I utledningene ovenfor har vi valgt bestemte retninger for feltet like over og like under grenseflaten. I utgangspunktet kjenner vi selvsagt ikke disse retningene og kunne, eksempelvis, like gjerne ha prøvd meg med helt motsatt retning på vektoren $\boldsymbol{E}_1$. Konklusjonene hadde imidlertid blitt de samme! Begge bidragene til kurveintegralet ville da blitt positive, slik at resultatet hadde blitt

$$E_2^{\|} = -E_1^{\|}$$

Men her betyr jo minustegnet nettopp at valget av *relativ retning* på $\boldsymbol{E}_1$ og $\boldsymbol{E}_2$ da hadde blitt "feil", dvs *gitt* en viss retning på $\boldsymbol{E}_2$, så må $\boldsymbol{E}_1$ peke i en slik retning at parallellkomponenten av $\boldsymbol{E}$ blir den samme på de to sidene av grenseflaten.
Samme argumentasjon gjør seg gjeldende ved betraktning av normalkomponentene.