Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

a)

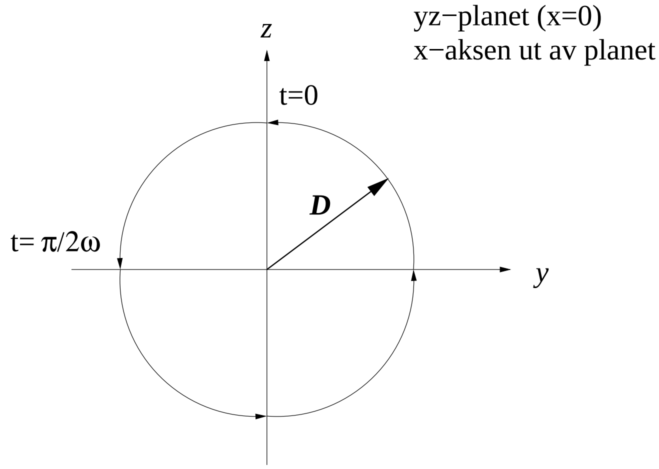
$$
\begin{aligned}
|\vec{D}| &= D_0 \left[\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)\right]^{1/2} \\
&= D_0
\end{aligned}
$$

for alle x og t. Med andre ord, vi har overalt og til enhver tid et utsving med konstant amplitude D_0. Dette betyr at spissen på vektoren $\vec{D}$ alltid ligger på en sirkel med radius D_0. Siden både D_z og D_y kontinuerlig gjennomløper alle verdier mellom $-D_0$ og $+D_0$, må $\vec{D}$ kontinuerlig gjennomløpe alle punkter på sirkelen. Dvs at bølgen er sirkulærpolarisert.

b)

$$
\begin{aligned}
D_z &= D_0 \cos(kx - \omega t) = D_0 \cos(\omega t - kx) \\
D_y &= D_0 \sin(kx - \omega t) = D_0 \cos(kx - \omega t - \pi/2) \\
&= D_0 \cos\left[(\omega t + \pi/2) - kx\right]
\end{aligned}
$$

Dette betyr at for alle verdier av x ligger D_y faseforskjøvet $\pi/2$ foran D_z. F.eks. vil D_y nå sin maksimalverdi $+D_0$ en fase $\pi/2$ tidligere enn D_z. Når $D_y = +D_0$, er $D_z = 0$, og $D_y = 0$ når $D_z = +D_0$. Dvs at vi for enhver verdi av x (f.eks. $x = 0$) har en situasjon som skissert nedenfor:



Bølgen forplanter seg i positiv x-retning. Vi ser derfor av skissen ovenfor at $\vec{D}$ roterer mot urviseren for en observatør som ser mot bølgens forplantningsretning. Bølgen er altså venstredreiende.

c) Skal vi ha en bølge som er høyredreiende, må vi la D_z ligge en fase $\pi/2$ foran D_y. Det får vi ved f.eks.

$$D_z = D_0 \sin(kx - \omega t)$$

og

$$D_y = D_0 \cos(kx - \omega t)$$

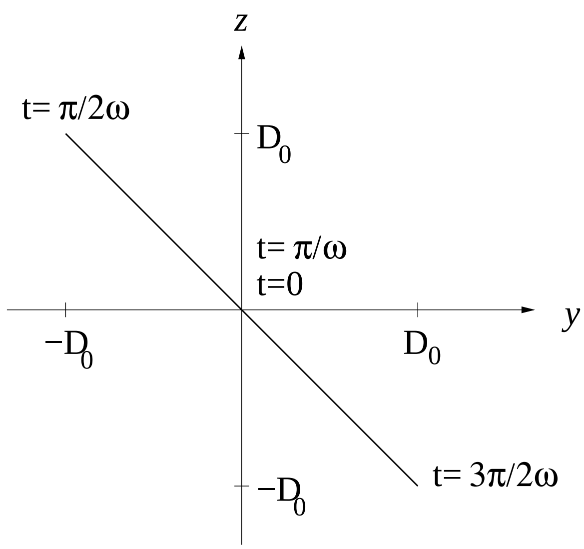
d) Vi har at

$$\sin(kx - \omega t + \pi) = -\sin(kx - \omega t)$$

slik at for bølgen beskrevet ved

$$\boldsymbol{D} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi)\hat{z}$$

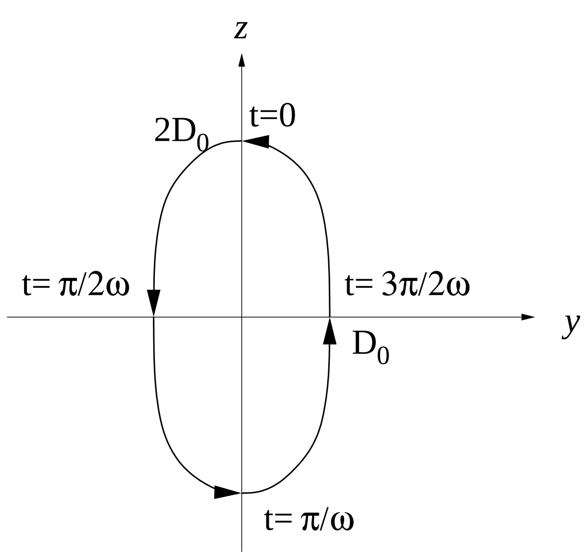
vil vi ha like stor $y-$ og $z-$komponent, men med motsatt fortegn. Det skulle da bli følgende rette linje i yz-planet ($z = -y$):



For bølgen beskrevet ved

$$\boldsymbol{D} = D_y\,\hat{y} + D_z\,\hat{z} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

får vi en ellipse i yz-planet:



ettersom vi har

$$\left(\frac{D_y}{D_0}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{2D_0}\right)^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$$

dvs ellipse med akse D_0 i $y-$retning og akse $2D_0$ i $z-$retning.

e)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_h + \boldsymbol{D}_v &= D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t) - D_0\hat{z}\cos(kx-\omega t) \\
&+ D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t) + D_0\hat{z}\cos(kx-\omega t) \\
&= 2D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Dvs, en lineærpolarisert bølge, polarisert i y-retning.
Hva så med polarisasjon i en vilkårlig retning i yz-planet, dvs i retningen gitt ved

$$\hat{n} = \hat{y}\cos\alpha + \hat{z}\sin\alpha,$$

som danner vinkelen α med y-aksen? En slik lineærpolarisert bølge får vi til ved å legge sammen

$$\boldsymbol{D}_h = D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t+2\alpha) - D_0\hat{z}\cos(kx-\omega t+2\alpha)$$

og

$$\boldsymbol{D}_v = D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t) + D_0\hat{z}\cos(kx-\omega t)$$

på dette viset:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_v + \boldsymbol{D}_h &= D_0\hat{y}\left[\sin(kx-\omega t+\alpha-\alpha) + \sin(kx-\omega t+\alpha+\alpha)\right] \\
&+ D_0\hat{z}\left[\cos(kx-\omega t+\alpha-\alpha) - \cos(kx-\omega t+\alpha+\alpha)\right] \\
&= D_0\hat{y}\cos\alpha\sin(kx-\omega t+\alpha) + D_0\hat{z}\sin\alpha\sin(kx-\omega t+\alpha) \\
&= D_0\hat{n}\sin(kx-\omega t+\alpha)
\end{aligned}$$

der vi har benyttet de velkjente reglene for sinus og cosinus til sum og differanse av to vinkler, hvor de to vinklene her er $kx-\omega t+\alpha$ og α.

Oppgave 2

a) Longitudinale utsving på ei slik fjær oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x,t)$ er at den kan skrives på formen $f(x-vt)$ eller $g(x+vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($f(x-vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs fjæra. Bølgen propagerer i positiv x-retning.

b) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m/s}$$

som er det vi skal ha.

c) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x,0)\,dx$ på intervallet $(x, x+dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,0)\,dx$$

Her inngår størrelsen $d\xi/dX = d\xi/dx$, og med $t = 0$ har vi

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2}$$

som gir

$$\varepsilon(x,0) = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{a^2}\frac{2x^2}{a^2}e^{-2x^2/a^2}$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a\,d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

som skulle vises.

d) Bølgepulsens impuls endrer seg heller ikke med tiden. Vi kan derfor også beregne p ved $t = 0$. Men la oss først se hvor langt vi kan komme uten egentlig å regne all verden. For det første: Ettersom $\xi(x,t) = \xi(x - vt)$, har vi sammenhengen

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -v\,\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Dessuten: Utsvinget ξ er en *symmetrisk* funksjon mhp argumentet $X = x - vt$. Dermed blir $\partial\xi/\partial x$ en *antisymmetrisk* funksjon mhp X. Dermed har vi:

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\infty}\mu\left(1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)(-v)\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mu v\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 dx \\ &= \frac{E}{v} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\mu v\xi_0^2}{\sqrt{2}a} \end{aligned}$$

Her har vi brukt at integralet av den antisymmetriske funksjonen $\partial\xi/\partial x$ er lik null.

Oppgave 3

a) Innsetting av den antatte løsningen gir

$$\begin{aligned}
\xi(x+d)-\xi(x) &= \xi_0\left[\sin(kx+kd-\omega t)-\sin(kx-\omega t)\right] \\
&= \xi_0\cdot 2\cos\frac{kx+kd-\omega t+kx-\omega t}{2}\,\sin\frac{kx+kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
&= 2\xi_0\cos(kx-\omega t+\frac{kd}{2})\,\sin\frac{kd}{2} \\
\xi(x-d)-\xi(x) &= \xi_0\left[\sin(kx-kd-\omega t)-\sin(kx-\omega t)\right] \\
&= \xi_0\cdot 2\cos\frac{kx-kd-\omega t+kx-\omega t}{2}\,\sin\frac{kx-kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
&= -2\xi_0\cos(kx-\omega t-\frac{kd}{2})\,\sin\frac{kd}{2}
\end{aligned}$$

der vi har benyttet den oppgitte trigonometriske relasjonen.

b) I neste omgang bestemmer vi høyre side i bevegelsesligningen (gitt i oppgaveteksten) ved å legge de to uttrykkene i punkt a sammen. Vi benytter oss av de oppgitte trigonometriske relasjonene

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

og får

$$\begin{aligned}
\xi(x+d)+\xi(x-d)-2\xi(x) &= 2\xi_0\sin\frac{kd}{2}\left[\cos(kx-\omega t+\frac{kd}{2})-\cos(kx-\omega t-\frac{kd}{2})\right] \\
&= 2\xi_0\sin\frac{kd}{2}[\cos(kx-\omega t)\cos\frac{kd}{2}-\sin(kx-\omega t)\sin\frac{kd}{2} \\
&\quad -\cos(kx-\omega t)\cos\frac{kd}{2}-\sin(kx-\omega t)\sin\frac{kd}{2}] \\
&= -4\xi_0\sin^2\frac{kd}{2}\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Her har vi også brukt at $\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$ og $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. På venstre side av bevegelsesligningen inngår den andrederiverte av ξ med hensyn på t:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi_0\sin(kx-\omega t)$$

Vi setter alt sammen inn i bevegelsesligningen, forkorter felles faktor ξ_0 og $\sin(kx-\omega t)$ på begge sider, og får

$$-m\omega^2=-4s\sin^2\frac{kd}{2}$$

dvs

$$\omega^2=\frac{4s}{m}\sin^2\frac{kd}{2}$$

som vi skulle vise. Dette viser samtidig at antagelsen var korrekt, nemlig at harmoniske bølger er løsning av den gitte bevegelsesligningen.

c) Når $kd\ll 1$, kan vi sette

$$\sin^2\frac{kd}{2}\simeq\frac{k^2d^2}{4}$$

slik at

$$\omega^2 \simeq \frac{4s}{m} \cdot \frac{k^2 d^2}{4} = \frac{sk^2 d^2}{m}$$

som gir

$$v = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

dvs uavhengig av bølgelengden (og bølgetallet).

d) Lydens hastighet i typiske metaller kan vi anslå ved å finne fram til tallverdier for Youngs modul og massetettheten. Et par eksempler:
Jern:

$$Y = 1.9 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}, \rho = 7200\ \mathrm{kg/m^3}, v = \sqrt{Y/\rho} = 5.1\ \mathrm{km/s}$$

Bly:

$$Y = 0.16 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}, \rho = 11340\ \mathrm{kg/m^3}, v = \sqrt{Y/\rho} = 1.2\ \mathrm{km/s}$$

Med andre ord, bølgehastigheten er av størrelsesorden 10^3 m/s. Det hørbare området dekker frekvenser mellom ca 20 og 20000 Hz, som dermed tilsvarer bølgelengder $\lambda = v/\nu$ i området mellom 5 cm og 50 m. Dette er uansett *veldig mye mer* enn typiske avstander mellom naboatomer i en krystall (mindre enn 1 nm), så for hørbar lyd er tilnærmelsen $kd \ll 1$, eventuelt $\lambda \gg d$ godt oppfylt.